

Untersuchungen zur Altersbestimmung von hauptreihenahen kühlen Sternen

Dissertation

der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Jan Bernkopf
aus Augsburg

München, den 17. Juli 2001

Erster Gutachter:
Zweiter Gutachter:
Mündliche Prüfung:

Prof. Dr. T. Gehren
Prof. Dr. R. Bender
22.2.2002

Zusammenfassung

Die Erforschung der chemischen Entwicklung unserer Galaxis erfolgt zum Teil über die Beobachtung von massearmen, hauptreihenahen Sternen. Hierbei müssen neben möglichst genauen stellaren Parametern auch die Unsicherheiten in der Modellphysik der Sternentwicklung bekannt sein, um die Aussagekraft der Altersbestimmungen zu beurteilen. Zwar wurden durchaus Arbeiten mit verschiedenen Entwicklungsrechnungen publiziert, doch erlauben Vergleiche der Arbeiten kaum Rückschlüsse auf die Altersgenauigkeit und die Gültigkeit einzelner Aspekte der Modellphysik. Dies begründet sich mit den meist erheblichen und nicht vollständig dokumentierten Unterschieden in der Modellphysik zwischen den einzelnen Publikationen. Die vorliegende Arbeit untersucht daher ausgehend von einem Referenzmodell die Auswirkungen einer systematischen Variation von Vorhauptreihenentwicklung, äußerer Randbedingung, Opazitäten, chemischen Häufigkeiten, Zustandsgleichung, Konvektion und Diffusion auf die Altersbestimmung. Gleichzeitig wurde Wert auf eine konsistente Modellbildung und deren Überprüfung anhand von Beobachtungen und Ergebnissen weiterer astrophysikalischer Forschungsgebiete gelegt. Als wichtigste Resultate dieser Arbeit ergaben sich mehrere unerwartete Erkenntnisse.

Im Zusammenhang mit der äußeren Randbedingung des Sternaufbaus erwies sich das allgemein in der Sternentwicklung verwendete Konvektionsmodell als unzulänglich. Mit Hilfe eines Modells, das als wesentliche Neuerung ein Spektrum verschieden großer konvektiver Elemente anstelle eines Einheitslements verwendet, gelang erstmals die konsistente Behandlung der Konvektion für Sternatmosphäre und Sterninneres. Hierbei wurde sowohl spektroskopischen Ergebnissen, als auch den Anforderungen der Sternentwicklung gleichzeitig Rechnung getragen. Des weiteren zeigte sich eine möglichst gute Bestimmung von chemischen Häufigkeiten als unerlässlich, da fehlerhafte oder unvollständige Häufigkeitsanalysen Altersdifferenzen von mehreren Milliarden Jahren hervorrufen können. Dies ist gleichbedeutend mit relativen Abweichungen von über 30% des Absolutalters. Es gelang der Nachweis, daß die neuesten Opazitätsdaten verwendet werden sollten, da sie wesentlich mehr Opazitätsquellen als bisher berücksichtigen. Insbesondere existieren nur für diese Opazitäten auch Daten mit angereicherter Alpha-Element-Häufigkeit, wie sie speziell bei beobachteten metallarmen Sternen vorkommen. Hier traten ebenfalls Altersdifferenzen von bis zu 30% des Alters auf. Die Berücksichtigung von Diffusionsprozessen, die anhand helioseismologischer Erkenntnisse begründet werden können, führt zu einer außerordentlichen Verringerung der Sternalter. Im Bereich des Turn-offs erscheinen die Sterne bis zu 20% (4 Milliarde Jahre) jünger. Schließlich weist auch die Verwendung einer verbesserten Zustandsgleichung auf deutlich jüngere Sternalter hin. Insgesamt ergibt sich unter Berücksichtigung aller Aspekte erstmals die Möglichkeit Alter für massearme Sterne bis zu einer Milliarde Jahre genau zu erhalten.

Im Zuge erster Anwendungen der in dieser Arbeit verbesserten Entwicklungsrechnungen, konnte die bisher in der Literatur bestehende Problematik der sehr hohen Alter bei Sternen in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe nicht behoben werden. Allerdings ergaben sich für diese Sterne Hinweise auf Ungenauigkeiten in der Bestimmung der stellaren Parameter. Schließlich wurde anhand von Entwicklungsrechnungen das Alter von Sternen der *Dicken Scheibe* auf 12-14 Milliarden Jahre bestimmt, während sich bei Sternen der *Dünnen Scheibe* höchstens etwa 8 Milliarden Jahre ergaben. Dazwischen zeichnet sich, erstmals durch Entwicklungsrechnungen belegt, eine Sternentstehungslücke von circa 3-5 Milliarden Jahren ab. Dies ist eine für die Entwicklungsgeschichte der Galaxis bedeutsame Trennung der beiden Populationen *Dünne Scheibe* und *Dicke Scheibe*.

Inhalt

1	Einleitung	1
1.1	Das historische Hertzsprung-Russell-Diagramm	1
1.2	Das Farben-Helligkeits-Diagramm	3
1.3	Das fundamentale Hertzsprung-Russell-Diagramm	5
1.4	Sterntypen und Sternentwicklung	6
2	Spektroskopie und das Alter der Sterne	13
2.1	Sternatmosphären und ihre Modellierung	13
2.1.1	Energietransport	14
2.1.1.1	Strahlungstransport	14
2.1.1.2	Konvektion	19
2.1.1.3	Wärmeleitung	19
2.1.2	Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie	20
2.1.3	Hydrostatisches Gleichgewicht	22
2.1.4	Modellrechnungen	22
2.2	Spektrumsynthese und Parameterbestimmung	22
2.3	Bestimmung der Entwicklungsstadien von Sternen	25
3	Sternaufbau und Sternentwicklung	29
3.1	Die Grundgleichungen des Sternaufbaus	29
3.2	Integrale Lösungen und das Vogt-Russell-Theorem	32
3.3	Das Henyey-Lösungsverfahren	33
3.4	Zeitliche Entwicklung der Modelle	37
3.5	Differentielle Entwicklungsrechnungen	38
3.6	Daten der heutigen Sonne	41
4	Detaillierte Untersuchungen	45
4.1	Referenzmodell	45
4.2	Vorhauptreihenentwicklung	48
4.3	Äußere Randbedingung	49

4.3.1	Diffusionsnäherung	49
4.3.2	Anschluß von Modellatmosphären	50
4.4	Konvektion	52
4.4.1	Die Formulierung nach Böhm-Vitense	54
4.4.2	Konvektion nach Canuto und Mazzitelli	58
4.5	Elementhäufigkeiten und Opazitäten	60
4.5.1	Häufigkeitsberechnungen	60
4.5.2	Opazitätstabellen	63
4.6	Diffusion	65
4.7	Zustandsgleichung	68
4.8	Ergebnisse	69
4.8.1	Vorhauptreihenentwicklung	69
4.8.2	Opazitätstabellen	71
4.8.3	Äußere Randbedingung und Konvektion	78
4.8.4	Zustandsgleichung	87
4.8.5	Chemische Häufigkeiten	90
4.8.5.1	Eichungenauigkeiten	90
4.8.5.2	Spektroskopische Häufigkeitsfehler	92
4.8.5.3	Häufigkeit von Alpha-Elementen	95
4.8.5.4	Heliumhäufigkeit	100
4.8.6	Diffusion	102
4.8.7	Ergebnisüberblick	107
5	Anwendungen	111
5.1	Sterne in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe	112
5.1.1	Der Stern G 74-5	112
5.1.2	Der Stern G 212-7	116
5.1.3	Der Stern G 246-38	119
5.1.4	Groombridge 1830	122
5.2	HR 7569 und die Entstehung der Dünnen Scheibe	124
6	Offene Fragen und Wünsche	131
	Literatur	133

1. Einleitung

Etwa 6000 Sterne sind am nächtlichen Himmel mit bloßem Auge erkennbar und mit optischen Hilfsmitteln wächst ihre Anzahl rasch um einige Zehnerpotenzen an. Es entspricht dem natürlichen Drang des Menschen diese Vielzahl von Objekten zu ordnen und zu klassifizieren. Ähnlich wie sich die Einordnung der Pflanzen in verschiedene Gattungen und Familien in der Botanik begünstigend auf die Bildung von Theorien über die Abstammung und Evolution des Pflanzenreichs ausgewirkt hat, führte auch in der Astronomie die Klassifikation von Sternen sehr bald zu Theorien des Sternaufbaus und der Sternentwicklung. Neben einem tieferen Verständnis zu den verschiedenen Entwicklungsstadien der Sterne ergibt sich daraus auch die Möglichkeit, das Alter von Sternen zu bestimmen. Entsprechend genaue Altersbestimmungen können wiederum Fragen zur Entwicklungsgeschichte unserer Milchstraße klären. Diese Arbeit untersucht die Genauigkeitsgrenzen für die Altersbestimmung von hauptreihenahen kühlen Sternen. Hierzu wurden die wesentlichen Unsicherheiten in der Theorie von Sternaufbau und Sternentwicklung genauer betrachtet und deren Auswirkungen auf die Altersbestimmung studiert.

In den folgenden Abschnitten der Einleitung werden zunächst mehrere bekannte astrophysikalische Begriffe eingeführt, um einem nicht mit der Materie vertrauten Leser den Zugang zu dieser Arbeit zu erleichtern. Im darauf folgenden Kapitel soll zum besseren Verständnis des Hintergrunds ein kleiner Einblick in die Zusammenhänge von Sternentwicklung und Altersbestimmung mit anderen Gebieten der Astrophysik gegeben werden. Kapitel 3 erläutert die grundlegenden Gleichungen von Sternaufbau und Sternentwicklung, sowie die Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems. Die einzelnen Untersuchungen zur Genauigkeit in der Altersestimmung werden im Kapitel 4 vorgestellt und die Anwendung der Untersuchungsergebnisse auf einige ausgewählte Beispiele ist Gegenstand von Kapitel 5. Schließlich folgt noch ein Kapitel über offene Problemstellungen, die sich zum Teil aus dieser Arbeit ergaben und im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr berücksichtigt werden konnten.

1.1 Das historische Hertzsprung-Russell-Diagramm

Bereits in den 1880er Jahren entwickelten E.C. Pickering und W.P. Fleming von der Harvard Sternwarte eine Sequenz von *Spektralklassen* - *O B A F G K M R N* und *S* - in die fast alle Spektren von Sternen eingeordnet werden können. Im **Henry-Draper-Katalog** bestimmte *allein* Annie Jump Cannon zwischen 1918 und 1924 rund 360 000 Sterne nach diesem System. Etwa zur gleichen Zeit führten unabhängig voneinander die beiden Astronomen Ejnar Hertzsprung und Henry Norris Russell ein Diagramm ein, das bis heute besonders Stellenwert als *botanischer Garten* für Sterne hat. Gemeinsam publizierten sie 1914 in der Zeitschrift *Nature* ihre Idee, die unter dem Namen **Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD)** zum alltäglichen Handwerkszeug in der Astronomie geworden ist. Auf der Abszisse des Diagramms befindet sich die Spektralklasse und auf der Ordinate wird die absolute visuelle Helligkeit M_v der Sterne angetragen (s. Abb. 1.1). Deutlich ist erkennbar, daß die Sterne nur in bestimmten Regionen des Diagramms anzutreffen sind. Ein Sachverhalt, der später noch näher erläutert wird.

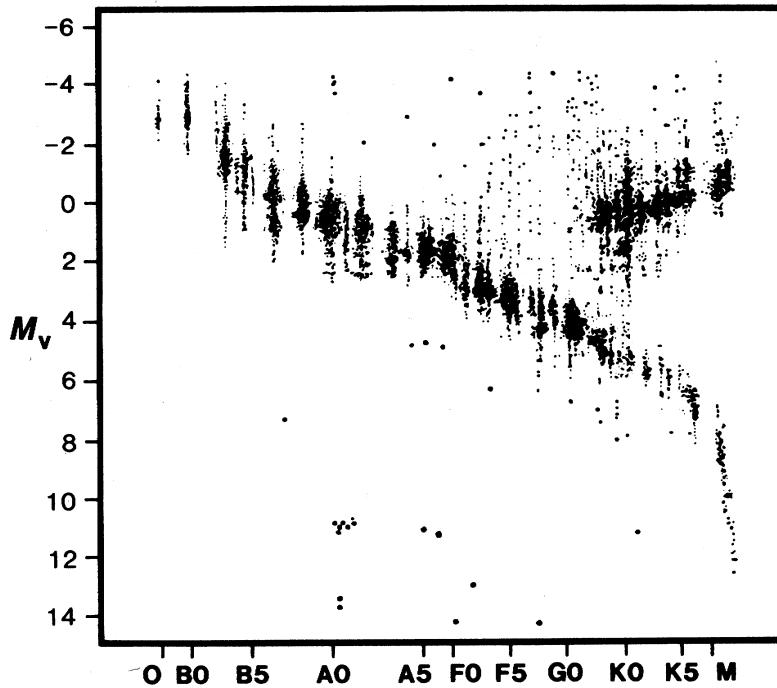


Abbildung 1.1 Hertzsprung-Russell-Diagramm für 6000 Sterne aus Gyllenberg (1936)

Um bei einem Vergleich der Sternhelligkeiten die unterschiedlichen Entfernungen der Sterne zu berücksichtigen, werden die Helligkeiten für eine einheitliche Entfernung von *zehn Parsec* umgerechnet. Dabei muß eine eventuell auftretende Absorption der Strahlung durch interstellare Materie berücksichtigt werden. Die **absolute Helligkeit** M erhält man aus der **scheinbaren Helligkeit** m , die auf der Erde gemessen wird, der **Entfernung** d des Sterns zur Erde in *Parsec* und der interstellaren **Absorption** A durch die Beziehung:

$$m - M = -2.5 \log \left(\frac{10^2}{d^2} \right) + A \quad (1.1)$$

Nachdem die Helligkeit eines Objekts in verschiedenen Bereichen des Spektrums meist unterschiedlich ist, wird der betrachtete Spektralbereich bei den Messungen mit angegeben. Der *visuelle* Spektralbereich befindet sich beispielsweise bei einer Wellenlänge von 550 nm und der *blaue* Spektralbereich bei 440 nm. Entsprechend erklärt sich also M_v als die absolute Helligkeit im visuellen Spektralbereich. Die spektralen Empfindlichkeitsfunktionen für die verschiedenen Bereiche sind normiert und in Abbildung 1.2 schematisch dargestellt. Wird die Helligkeit über das *gesamte* Spektrum ermittelt, so ergibt sich die **bolometrische Helligkeit** m_{bol} . Der Übergang von visueller zu bolometrischer Helligkeit wird mit Hilfe der **bolometrischen Korrektur** $B.C.$ bewerkstelligt:

$$m_{bol} = m_v + B.C. \quad (1.2)$$

Diese Korrektur ist für Sterne verschiedener Spektralklassen unterschiedlich und so festgelegt, daß für die Sonne $B.C. = 0.0$ gilt.

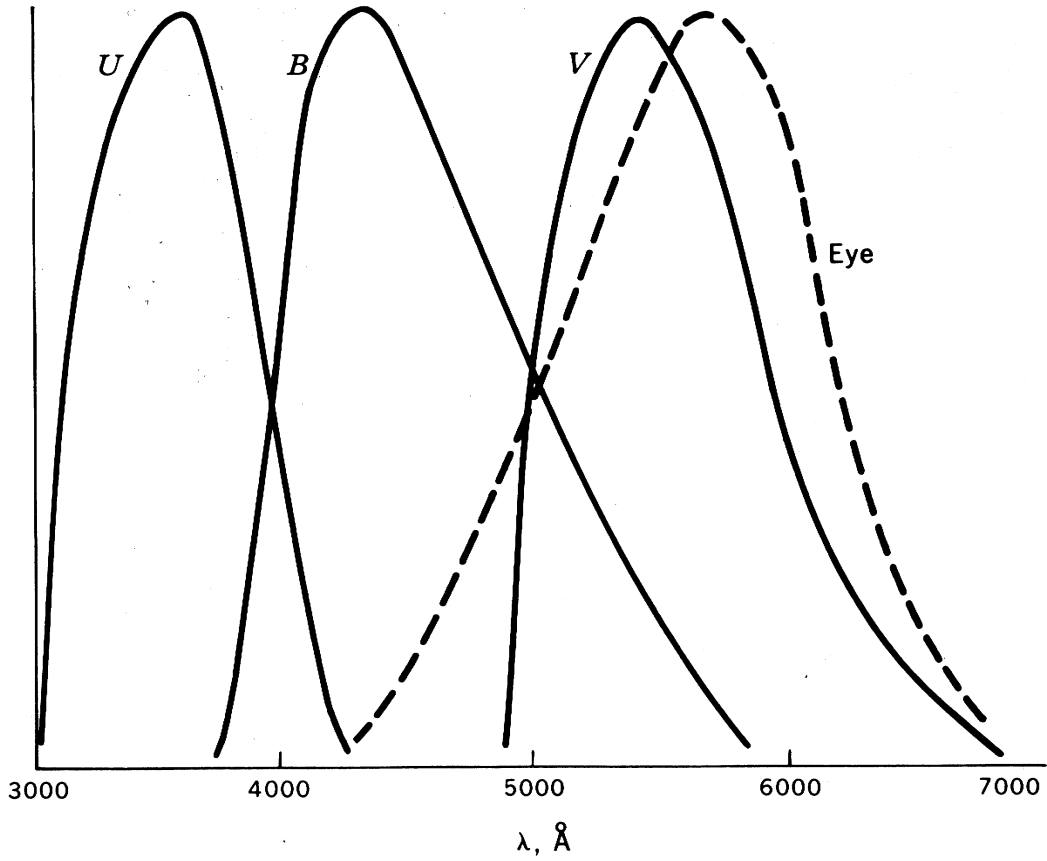


Abbildung 1.2 Schematische Darstellung verschiedener spektraler Empfindlichkeitsfunktionen, sowie der gestrichelt eingetragenen Empfindlichkeitsfunktion des menschlichen Auges aus Clayton (1983)

1.2 Das Farben-Helligkeits-Diagramm

Die spektrale Intensitätsverteilung von Sternen kann in grober Näherung durch das bekannte *Plancksche Strahlungsgesetz* wiedergegeben werden.

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (1.3)$$

Sind die Intensitäten eines *schwarzen Strahlers* an zwei verschiedenen Frequenzpunkten bekannt, so läßt sich mit Gleichung (1.3) die Temperatur des Strahlers eindeutig bestimmen. Dieser Sachverhalt wird bei Sternen ausgenutzt. Die Helligkeiten eines Sterns können in verschiedenen Spektralbereichen gemessen und verglichen werden. Wurden beispielsweise die Helligkeiten m_V und m_B im visuellen und blauen Spektralbereich gemessen, so kann der **Farbindex** $m_B - m_V$ oder kurz $B - V$ gebildet werden. Dieser Farbindex entspricht im Wesentlichen einer Temperatur. Allerdings sind Sterne keine schwarzen Strahler und der mit dem Farbindex verknüpfte Temperaturbegriff besitzt somit Unsicherheiten. Wird nun der Farbindex anstelle der Spektralklassen in Abbildung 1.1 eingetragen, so ergibt sich ein **Farben-Helligkeits-Diagramm** wie in Abbildung 1.3.

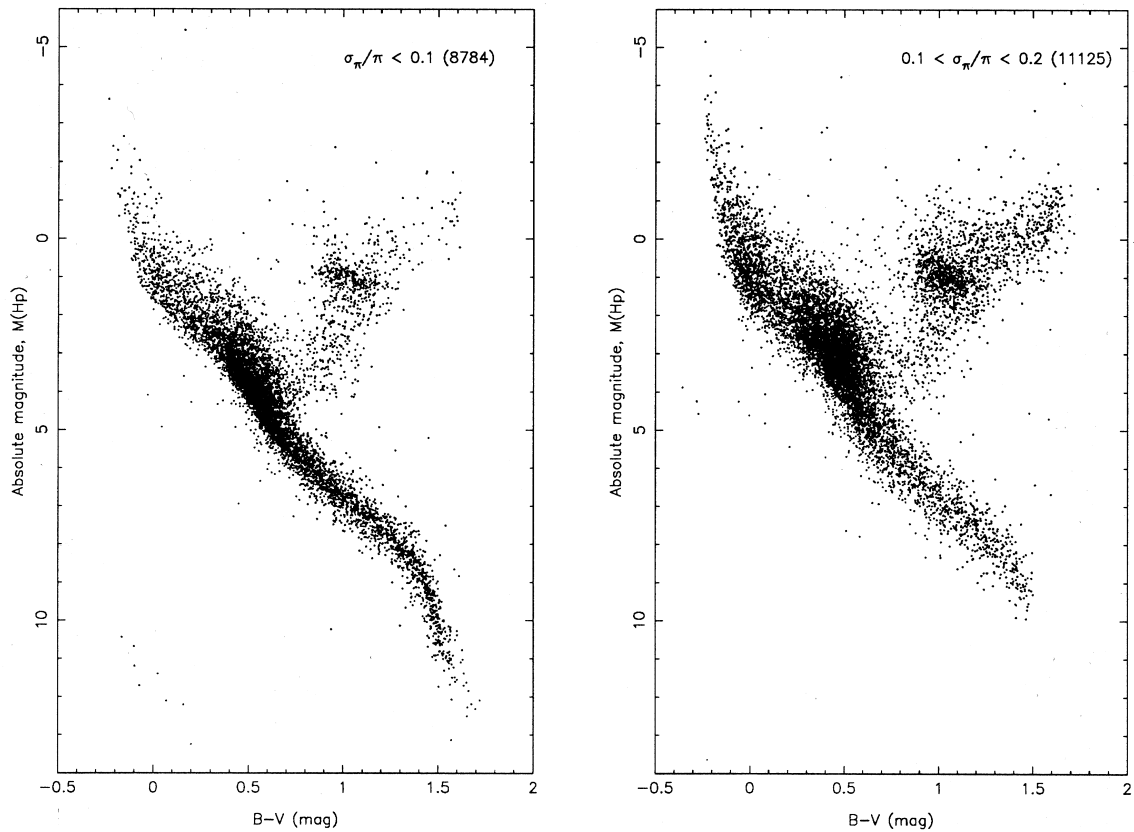


Abbildung 1.3 Farben-Helligkeits-Diagramme: links für 8784 Sterne und rechts für 11125 Sterne. Beide Diagramme wurden mit Hilfe des Astrometrie-Satelliten HIPPARCOS gewonnen. Im linken Teil ist der relative Fehler der Entfernungsbestimmung kleiner 0.1 und im rechten Teil zwischen 0.1 und 0.2. Aus dem Diagramm von Perryman *et al.* (1995) wird deutlich, daß die Genauigkeit der Entfernungen einen starken Einfluß auf die Streuung hat.

Die Verwandtschaft der beiden Diagramme 1.1 und 1.3 ist unmittelbar erkennbar. In der Tat hängen Spektralklassen und Farbindex auch über einen fundamentalen stellaren Parameter zusammen. Erneut unter Anlehnung an das Plancksche Strahlungsgesetz (1.3) kann eine abgewandelte Form des *Stefan-Boltzmann-Strahlungsgesetzes* eingeführt werden. Dabei wird als ein Maß für den **Strahlungsstrom** Φ , der von einem Stern abgegeben wird, die **Effektivtemperatur** T_{eff} unter Verwendung der Stefan-Boltzmann-Strahlungskonstanten σ definiert.

$$\Phi = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (1.4)$$

Der Zusammenhang von Effektivtemperatur und Farbindex ist offensichtlich, nachdem beiden Temperaturbegriffen das Plancksche Strahlungsgesetz zugrundeliegt.

Der Zusammenhang mit den Spektralklassen ergibt sich über die Wechselwirkung der Strahlung, die einen Stern verläßt, mit den äußersten Gasschichten, die der Stern besitzt. Es ist einleuchtend, daß bei unterschiedlich starkem Strahlungsstrom, auch eine unterschiedliche Ionisierung der Materie vorliegt, die sich wiederum charakteristisch auf das Sternspektrum auswirkt. Allerdings kann das komplizierte Wechselspiel zwischen Strahlung und Materie erst durch die *Theorie der Sternatmosphären* physikalisch beschrieben werden.

1.3 Das fundamentale Hertzsprung-Russell-Diagramm

Die Effektivtemperatur hat gegenüber den Spektralklassen und dem Farbindex als Beschreibungsgröße für einen Stern mehrere Vorteile. Sie gibt gemäß Gleichung (1.4) den Strahlungsstrom an und ist über den Sternradius R_* mit der Strahlungsleistung eines Sterns, die in der Astrophysik als **Leuchtkraft** L bezeichnet wird, wie folgt verknüpft:

$$L = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (1.5)$$

Im Abschnitt 3.2 wird dargelegt, daß im Prinzip chemische Zusammensetzung, Masse, Radius und Leuchtkraft einen Stern eindeutig kennzeichnen. Diese Größen werden daher auch als **Zustandsgrößen** oder **fundamentale Parameter** eines Sterns bezeichnet. Aufgrund von Gleichung (1.5) gilt auch die Effektivtemperatur als ein fundamentaler Parameter. Dem gegenüber muß erwähnt werden, daß die Spektralklassifikation nur eine grobe Einteilung der Sterne darstellt, die nicht immer völlig eindeutig ist. So findet beispielsweise die chemische Zusammensetzung der Sterne keine Berücksichtigung. Prinzipiell gilt dies auch für den Farbindex. Zwar lassen sich aufgrund von Farben auch Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphäre bestimmen, dennoch ist der Fehler einer aus Farben gewonnenen Effektivtemperatur nicht mehr vernachlässigbar. Außerdem werden die gewonnenen Farben durch eventuell vorhandenes interstellares Gas und Staub beeinflusst, da die interstellare Materie bei verschiedenen Wellenlängen unterschiedliches Absorptionsverhalten aufweist.

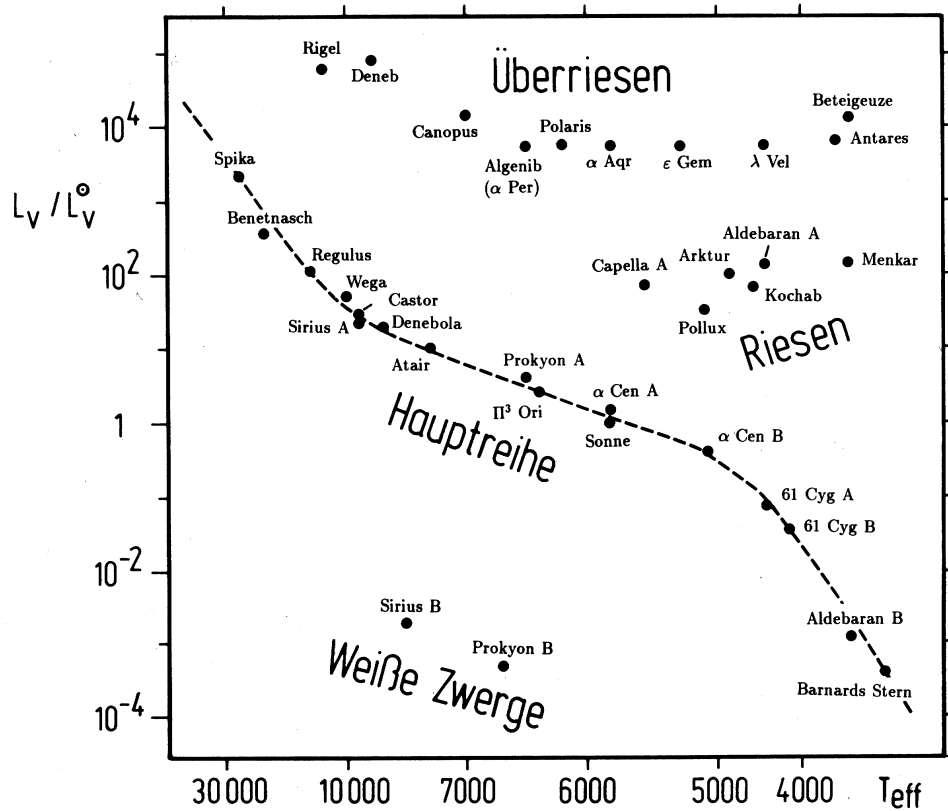


Abbildung 1.4 Hertzsprung-Russell-Diagramm bekannter Sterne für den visuellen Spektralbereich nach Scheffler & Elsässer (1990).

Im Sinne einer möglichst exakten physikalischen Beschreibung der Sterne ist es demnach wünschenswert, die fundamentalen Parameter von Sternen zu bestimmen und diese auch im Hertzsprung-Russell-Diagramm einzutragen. Wird entsprechend als Abszisse die Effektivtemperatur und als Ordinate die Leuchtkraft in Einheiten der Sonnenleuchtkraft angetragen, erhält man die gewünschte fundamentale Form. Der Übergang von absoluter Helligkeit M_{bol} zur Leuchtkraft L eines Sterns kann mit Hilfe der Sonne bewerkstelligt werden. Sowohl die Leuchtkraft der Sonne $L_{\odot}$ kann zum Beispiel aus Satellitenmessungen bestimmt werden, als auch die scheinbare Helligkeit der Sonne im für die Sterne verwendeten *Größenklassensystem*.

Mit Gleichung (1.1) läßt sich aus der scheinbaren die absolute bolometrische Helligkeit der Sonne $M_{bol}^{\odot}$ gewinnen und es gilt dann folgende Beziehung:

$$M_{bol} - M_{bol}^{\odot} = -2.5 \log \frac{L}{L_{\odot}} \quad (1.6)$$

In Abbildung 1.4 ist die fundamentale Darstellung des Hertzsprung-Russell-Diagramms für bekannte Sterne wiedergegeben. Daneben sind auch Bezeichnungen von Sterntypen zu finden, die im nächsten Abschnitt erläutert werden.

1.4 Sterntypen und Sternentwicklung

Die Betrachtung der verschiedenen Abbildungen 1.1, 1.3 und 1.4 zeigt, daß die Verteilung der Sterne im Hertzsprung-Russell-Diagramm nicht gleichmäßig ist. Vielmehr findet man eine Anhäufung der Sterne auf der Diagonalen von großer Leuchtkraft und hoher Effektivtemperatur zu niedriger Leuchtkraft und geringer Effektivtemperatur - der sogenannten **Hauptreihe**. Oberhalb der Hauptreihe befinden sich **Riesen** und **Überriesen**. Die Namensgebung hat ihre Ursache in dem Tatbestand, daß gemäß Gleichung (1.5) eine höhere Leuchtkraft bei gleicher Effektivtemperatur einen größeren Sternradius fordert. Ebenso erklärt sich der Begriff **Zwerge** für Sterne unterhalb der Hauptreihe. Die **Weißes Zwerge** sind dementsprechend Zwerge, deren Strahlungsmaxima bei Wellenlängen für bläulich-weißes Licht liegt.

Schon als die ersten Hertzsprung-Russell-Diagramme angefertigt wurden, kam es auch zu einfachen Theorien der Sternentwicklung. Es war bekannt, daß die Sterne im Wesentlichen aus den Elementen Wasserstoff und Helium bestanden. Mit Hilfe der Thermodynamik berechnete *Emden* bereits 1907 in seinem Buch *Gaskugeln* die Bedingungen in der Sonne. Verglichen mit modernen Darstellungen konnte er schon damals die Physik im Sonneninneren relativ genau beschreiben. Allerdings stellte die Frage nach der Energiequelle innerhalb der Sterne ein ungelöstes Problem dar. Entsprechend wurde anfangs die Ansicht vertreten, daß sich die Sterne aus Gaswolken entwickeln. Durch Kontraktion wandern die Sterne in ihrer frühen Phase aus dem Gebiet der Überriesen zur Hauptreihe bei sehr hohen Effektivtemperaturen. Danach sollten die Sterne entlang der Hauptreihe zu niedrigeren Effektivtemperaturen wandern und dabei ihren Kontraktionsprozess fortsetzen. Insgesamt wurde also die frei werdende Gravitationsenergie als hauptsächliche Quelle der Energiegewinnung in Sternen angesehen. Jedoch zeigt bereits eine einfache Abschätzung, daß diese Annahme im Widerspruch zum geologischen Erdalter und zum Alter der irdischen Fauna und Flora steht.

Die durch Kontraktion eines Sterns angefallene Gravitationsenergie kann mit Hilfe der Gravitationskonstanten G , der Sternmasse M und des Sternradius R einfach abgeschätzt werden:

$$E_{\text{grav}} = G \cdot \frac{M^2}{R} \quad (1.7)$$

Wird die Gravitationsenergie E_{grav} durch die Leuchtkraft des Sterns geteilt, so ergibt sich die sogenannte **Kelvin-Helmholtz-Zeitskala** τ_{kh} :

$$\tau_{\text{kh}} = \frac{E_{\text{grav}}}{L} \quad (1.8)$$

Entsprechend hätte die Kontraktionsenergie bei der Sonne nur für circa $3 \cdot 10^7$ Jahre als Energiequelle gereicht. Bereits zur Zeit Emdens wurde das Erdalter aufgrund geologischer Untersuchungen allerdings auf 150-200 Mio. Jahre geschätzt (s. Emden 1907, S. 425 ff.).

Eine andere Energiequelle, die jedoch ebenso einfach widerlegt werden kann, war nach R. Mayer die kinetische Energie von Meteoriten, die ständig in die Sonne fallen sollten. So kommt Emden auch zum Schluss: *Die Energiequelle der Sonnenstrahlung ist noch vollständig unbekannt; Kräfte, die nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze wirken, können nur einen verschwindend kleinen Anteil der in Betracht kommenden Energie leisten.*

Bereits 19 Jahre später zog Eddington in seinem Buch *The Internal Constitution of the Stars* unter dem Kapitel *The Source of Stellar Energy* für subatomare Prozesse als Energiequelle der Sterne ins Feld. Trotz des Problems, wie bei der Vereinigung zweier Protonen die entsprechend hohen kinetischen Energien zur Überwindung ihres Coulombwalls erreicht werden sollten, beharrte Eddington auf der Umwandlung von Wasserstoff in Helium. Das Problem wurde von dem russischen Physiker George Gamow gelöst, der den *Tunneleffekt* aus der Quantenmechanik zur Überwindung des Coulombwalls heranzog.

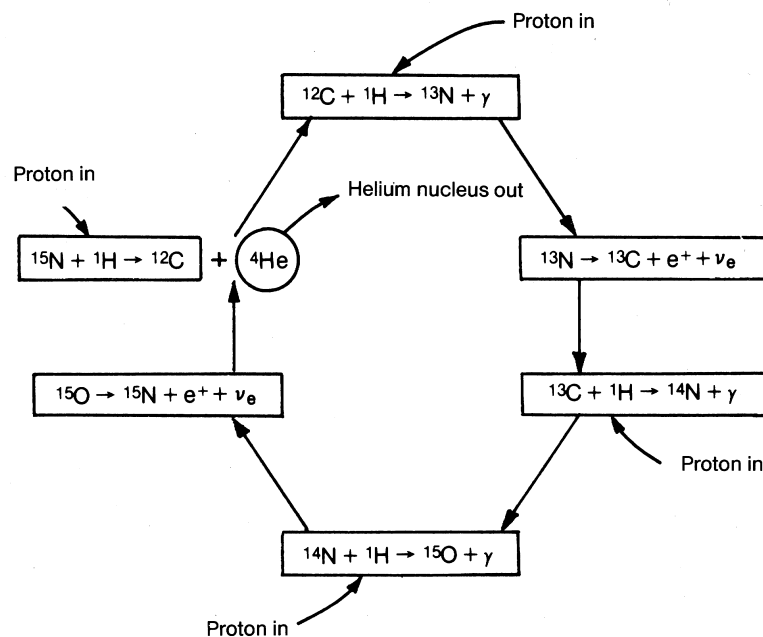


Abbildung 1.5 Schematischer Ablauf des Kohlenstoffzyklus aus Karttunen *et al.* (1987).

Damit war der Weg zur Beschreibung der Energiequelle in den Sternen geebnet. Im Jahr 1938 veröffentlichten zuerst Carl Friedrich von Weizsäcker und später Hans Bethe den **Kohlenstoffzyklus**, der die Umwandlung von vier Protonen in einen Heliumkern beschreibt (s. Abb. 1.5). Darin werden bestimmte Isotope von Kohlenstoff, Stickstoff oder Sauerstoff benötigt, die bei den ersten Sternenerationen noch nicht vorhanden waren. Nach heutigem Verständnis waren in der Frühphase des Kosmos fast ausschließlich Wasserstoff und Helium vorhanden. Sowohl in den ersten Sternenerationen als auch bei massearmen Sternen findet der Fusionsprozeß mittels der **pp-Kette** statt (s. Abb. 1.6).

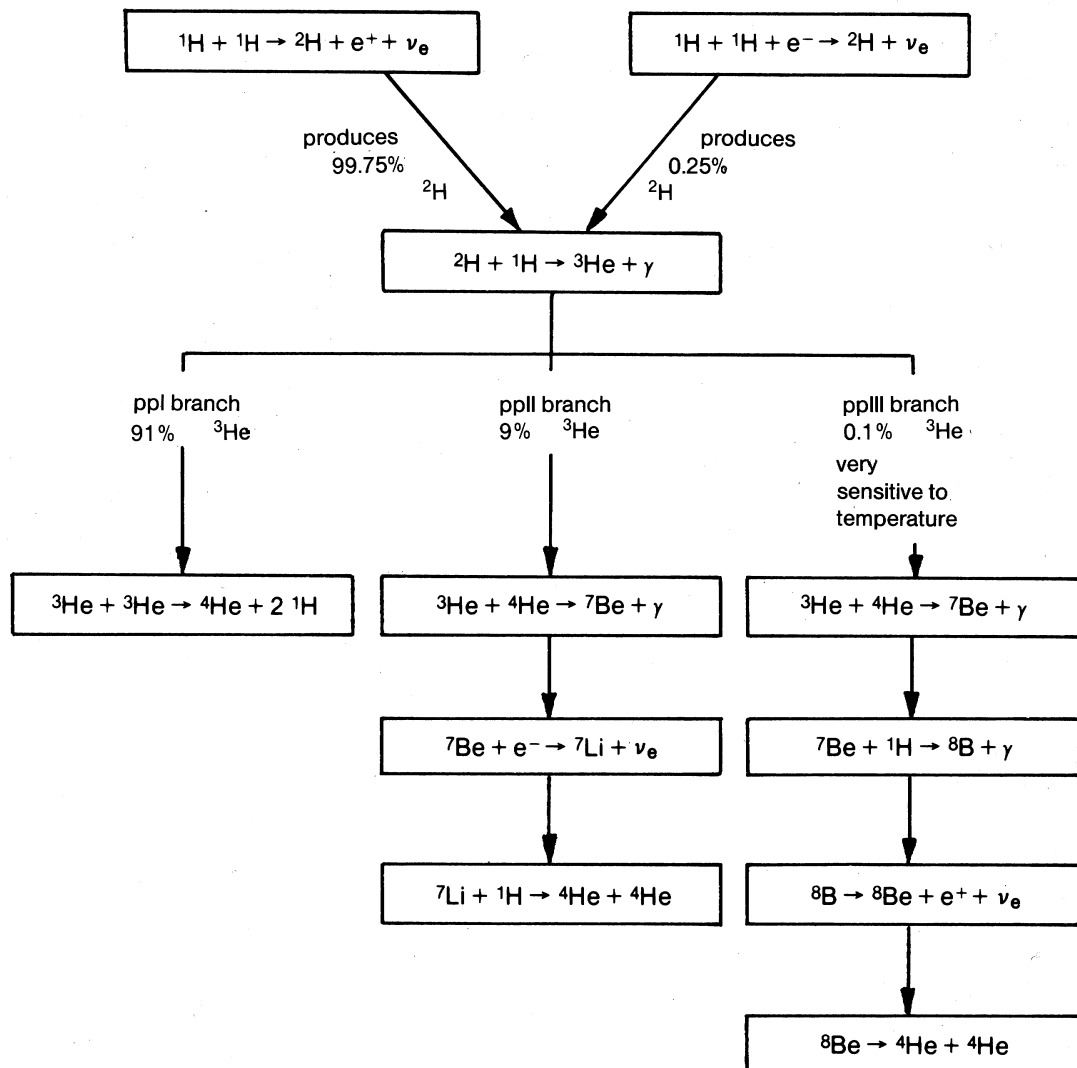


Abbildung 1.6 Schematischer Ablauf der verschiedenen Teilzweige der pp-Kette aus Karttunen *et al.* (1987).

Selbst unsere Sonne produziert fast ihre gesamte Energie mittels der pp-Kette, da die Reaktionen dieser Kette bei geringeren Temperaturen im Sterninneren ($T_c < 15 \cdot 10^6 \text{K}$) häufiger ablaufen, als die Teilreaktionen des Kohlenstoffzyklus. Erst bei höheren Kerntemperaturen überwiegt die Energieproduktion durch den Kohlenstoffzyklus.

Mit den unterschiedlichen Fusionsreaktionen als stellare Energiequelle und dem Einzug numerischer Methoden und Verfahren in modernen Computeranlagen entstand eine vollständige Revision des Entwicklungsablaufs der einzelnen Sterne. Dem heutigen Bild entsprechend entstehen Sterne in ausgedehnten interstellaren selbstgravitierenden Gaswolken von mehreren hundert Sonnenmassen. Eine derartige Wolke zerfällt während ihres Kollaps in Fragmente die am Ende zu **Protosternen** werden (*Fragmentation*). Die Protosterne sind noch sehr ausgedehnt und besitzen daher auch eine sehr hohe Leuchtkraft. Während ihrer weiteren Kontraktion entwickeln sie sich schließlich von der **Hayashi-Linie** zur Hauptreihe. Diese **Vorhauptreihenentwicklung** wird im Abschnitt 4.2 näher beschrieben. Mehrere Entwicklungswege für Sterne unterschiedlicher Massen können aus Abbildung 1.7 entnommen werden. Schließlich erzeugt der Stern praktisch seine gesamte Energie durch Kernfusion - er hat die Hauptreihe erreicht.

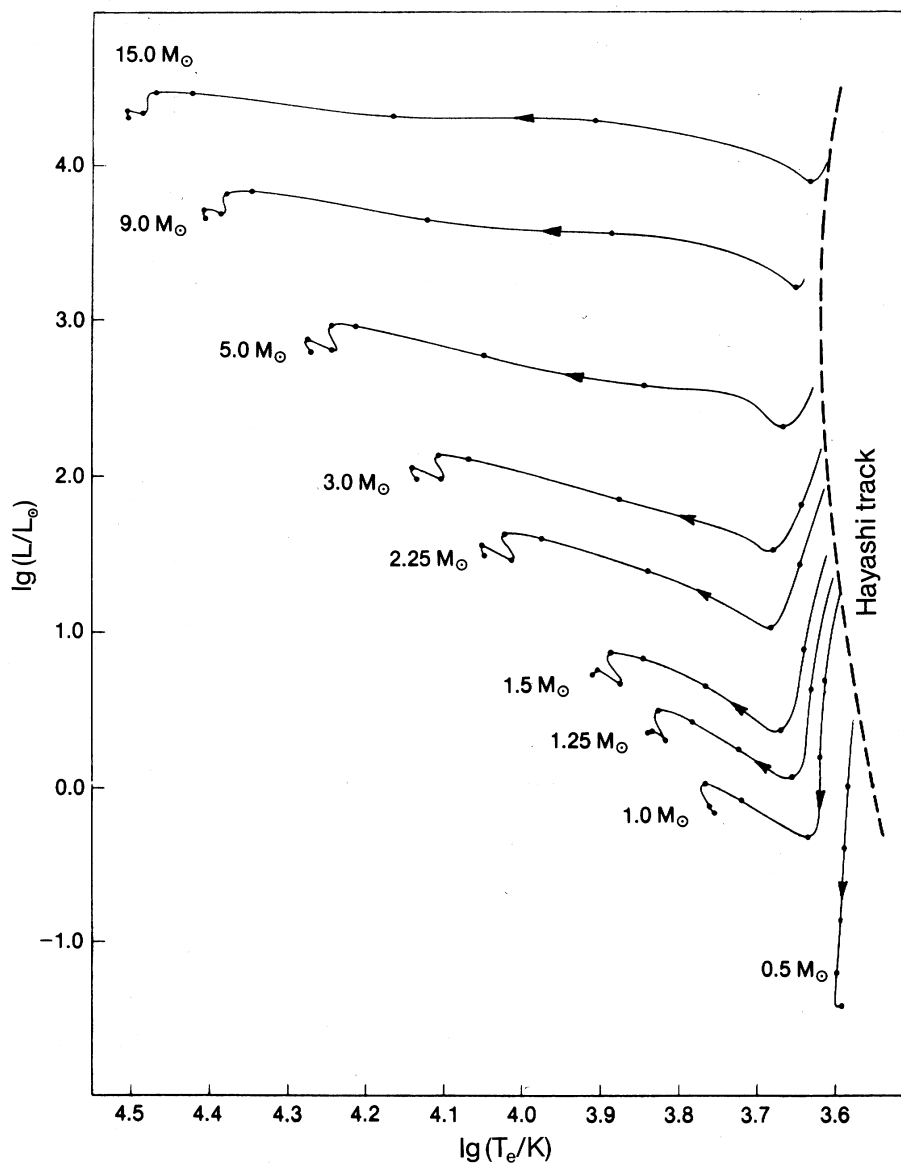


Abbildung 1.7 Vorhauptreihenentwicklung für Sterne unterschiedlicher Massen nach Iben (1964).

Während die Zeit der Vorhauptreihenentwicklung durch die Kelvin-Helmholtz-Zeitskala gegeben ist, wird die Verweildauer auf der Hauptreihe durch die nukleare Zeitskala gekennzeichnet. Dies entspricht dem Zeitraum, in dem die Fusion von Wasserstoff zu Helium im Zentrum eines Sterns stattfindet. Nur etwa 10% des gesamten Wasserstoffvorrats werden dabei im **zentralen Wasserstoffbrennen** umgesetzt. Der *Massendefekt* bei der Verschmelzung von vier Protonen zu einem Heliumkern beträgt 26.73 MeV während sich die Ruhemasse eines Protons auf 931 MeV beläuft. Mit diesen Angaben berechnet sich die nukleare Zeitskala aus Masse M und Leuchtkraft L eines Sterns zu:

$$\tau_{\text{nuc}} = 0.1 \cdot \frac{26.73}{4 \cdot 931} \cdot \frac{Mc^2}{L} \quad (1.9)$$

Für die Sonne ergeben sich daraus knapp 10 Milliarden Jahre und für einen Stern mit 30 Sonnenmassen nur 2 Millionen Jahre. Die kurze Verweildauer der massereichen Sterne auf der Hauptreihe hat ihre Ursache im schnellen Anwachsen der Leuchtkraft mit steigender Masse. Größenordnungsmäßig gilt:

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} \quad (1.10)$$

Nachdem der zentrale Wasserstoffvorrat aufgebraucht ist beginnt bei Sternen über 0.26 Sonnenmassen der Fusionsprozess innerhalb einer Schale um den entstandenen Heliumkern. Sterne mit geringeren Massen als 0.26 Sonnenmassen verwandeln ihren gesamten Wasserstoffvorrat in Helium und enden nach ihrer Hauptreihenphase schließlich als Weiße Zwerge. Die schwereren Sterne vergrößern nun aufgrund des *Wasserstoffschalenbrennens* ihren Radius, bis sie auf die Hayashi-Linie treffen. Aus Stabilitätsgründen können sie ab dort nur entlang der Hayashi-Linie zu höheren Leuchtkräften wandern. Die Sterne sind zu *Roten Riesen* geworden. Dabei steigen Druck und Temperatur im Sterninneren an, bis *zentrales Heliumbrennen* einsetzt und Helium zu Kohlenstoff fusioniert wird (s. Abb. 1.8).

Bei Sternen bis zwei Sonnenmassen bildet sich ein Kohlenstoffkern und *Heliumschalenbrennen* setzt ein. Schließlich stößt der Stern nun Teile seiner Hülle ab und es entsteht ein *planetarischer Nebel*. Etwa zur selben Zeit wird die Fusionsreaktion beendet, da Druck und Temperatur zu weiteren Reaktionen nicht mehr ausreichend sind. Der Stern wandert in das Gebiet der Weißen Zwerge und kühlt dort aus. In Abbildung 1.9 wird der Lebensweg gezeigt, der auch unserer Sonne beschieden ist.

Sterne ab zwei Sonnenmassen versuchen ein *Kohlenstoffbrennen* zu zünden und explodieren eventuell dabei als Supernova, wobei der Stern vollständig zerstört werden kann. Liegen die Sternmassen über 15 Sonnenmassen, so können Fusionsreaktionen bis zur Erzeugung eines Eisenkerns stattfinden. Bei der Fusion von schwereren Elementen als Eisen wird keine Energie mehr frei, sondern es muß Energie zugeführt werden. Entsprechend endet also die Erzeugung von Energie im Sterninneren und der Gravitationskollaps des Sterns tritt ein. Auch in diesem Fall tritt eine Supernova auf und als Endstadium werden Objekte wie *Neutronensterne* oder *Schwarze Löcher* erreicht.

Die Zeitskala für die Entwicklung ab Erreichen des Riesenastes bis zu den jeweiligen Endstadien beträgt im Allgemeinen nicht mehr als 10% der entsprechenden nuklearen Zeitskala. Die Verteilung der Sterne im Hertzsprung-Russell-Diagramm kann somit durch die Theorie von Sternaufbau und Sternentwicklung erklärt werden. Darüber hinaus ist es möglich eine Vielzahl von Phänomenen, wie beispielsweise die Pulsation von Sternen in bestimmten Entwicklungsphasen theoretisch zu beschreiben.

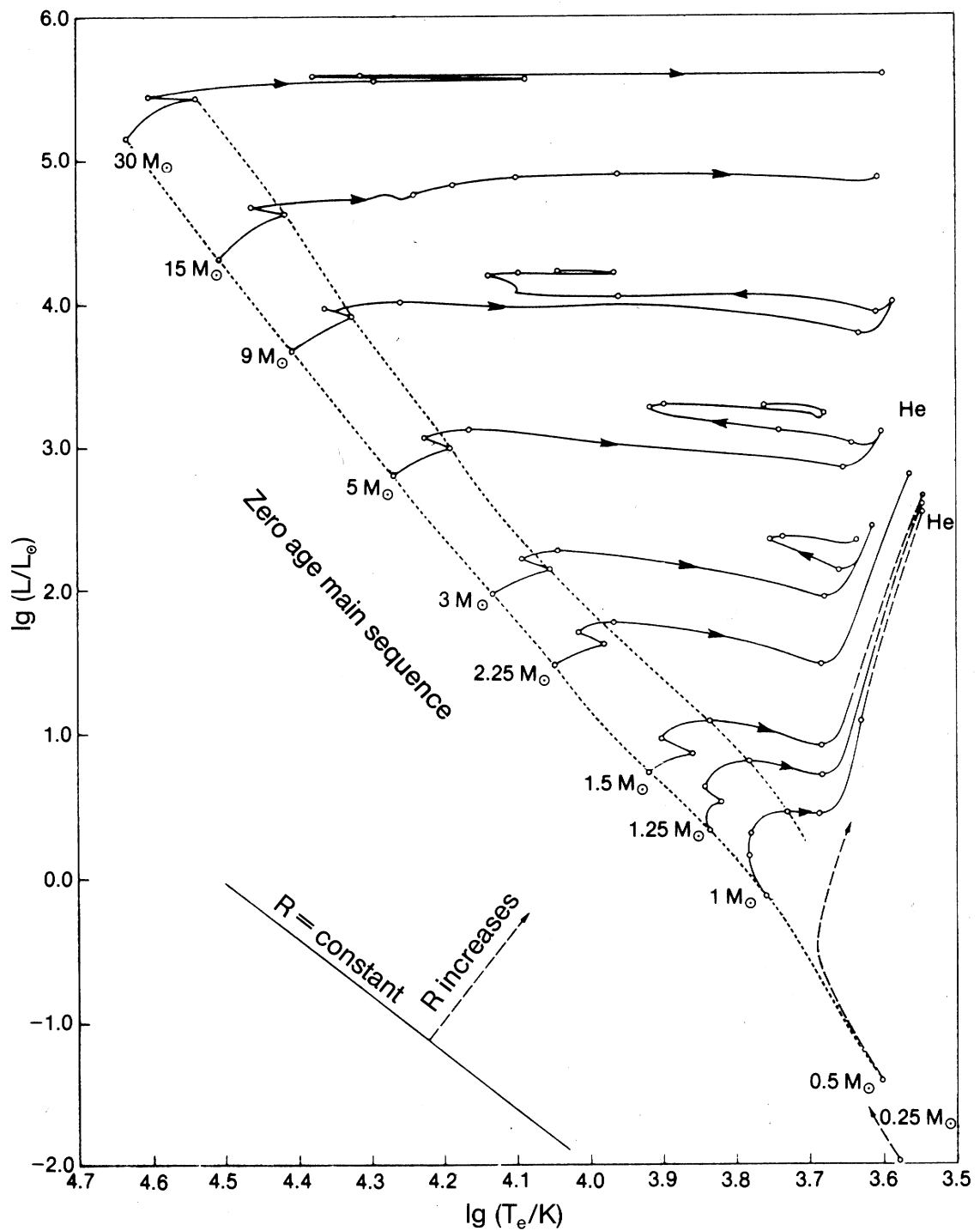


Abbildung 1.8 Nachhauptreihenentwicklung für Sterne unterschiedlicher Massen nach Iben (1967).

Dennoch gibt es in den einzelnen Entwicklungsstadien eine große Anzahl von Problemen. Als Stichwörter seien nur der ungeklärte *Explosionsmechanismus von Supernovae* oder das *solare Neutrinoproblem* genannt.

Zum Studium der Entwicklungsgeschichte unserer Galaxis sind im Wesentlichen nur die massearmen Sterne von Interesse, da sie beachtliche Alter erreichen. Dabei ist darauf zu achten, daß die zu untersuchenden Sterne das Riesenstadium noch nicht erreicht haben. Wie noch zu sehen sein wird, geht bei den Riesensternen eine wichtige Information verloren, die zur hauptreihenahen Entwicklungsphase noch vorhanden ist. Entsprechend beschränkt sich der weitere Text auf massearme Sterne, die das Riesenstadium noch nicht erreicht haben.

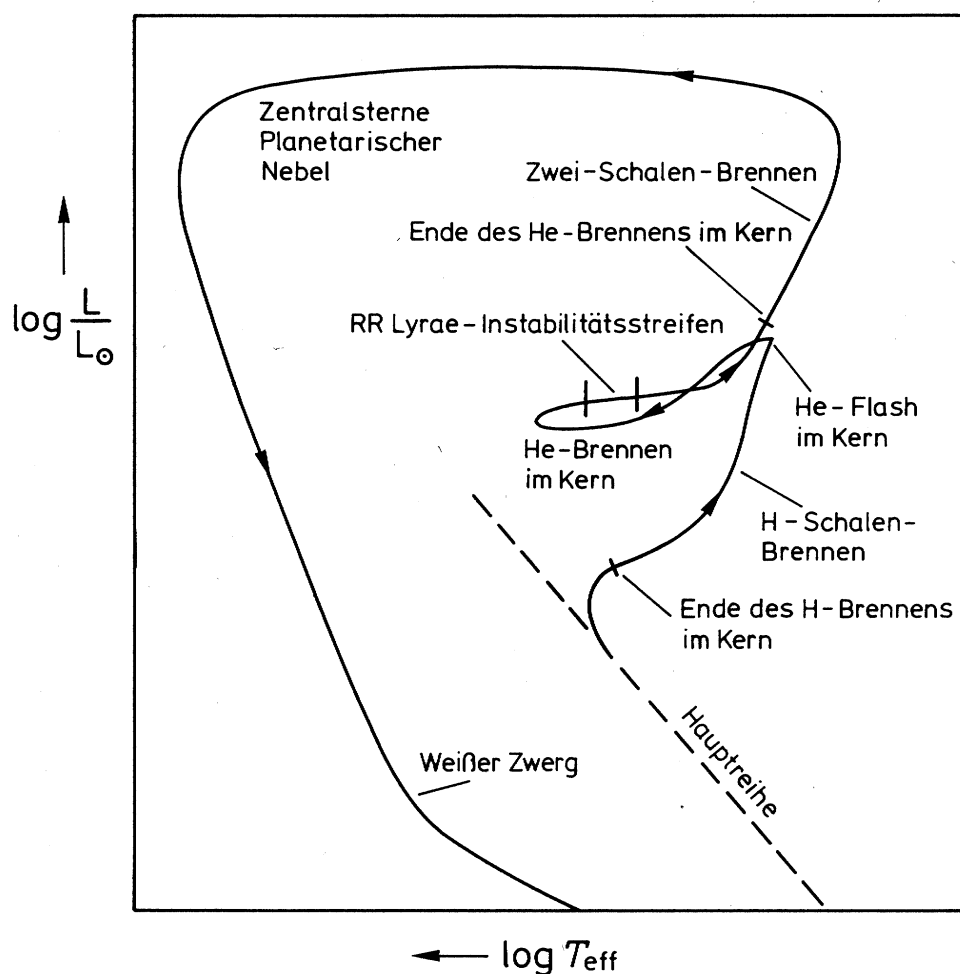


Abbildung 1.9 Gesamter Entwicklungsweg für einen Stern von einer Sonnenmasse (Scheffler & Elsässer 1990).

Beschreibungen der anderen Entwicklungsstadien und des Lebenswegs massereicher Sterne sind in recht ausführlicher Weise sowohl populärwissenschaftlich in Kippenhahn (1984), als auch astrophysikalisch in Cox & Giuli (1968), Clayton (1983) und Kippenhahn & Weigert (1990) enthalten. Wie aus dem Licht der massearmen Sterne Informationen zur Entwicklungsgeschichte unserer Galaxis entnommen werden kann und welche Probleme dabei im Zusammenhang mit der Sternentwicklung auftreten zeigt sich im nächsten Kapitel.

2. Spektroskopie und das Alter der Sterne

Fast alle Kenntnisse, die wir über Sterne besitzen stammen aus der Untersuchung der Energie, welche uns von den Sternen zum Teil als Licht, zum Teil auch als Strahlung anderer Wellenlängen erreicht. Produktion und Transport der Energie im Sterninneren bleiben für die beobachtenden Astronomen unsichtbar. Die Photonen, die uns auf der Erde erreichen stammen aus den äußersten Schichten des Sterns, der *Sternatmosphäre*. Die wellenlängenabhängige Verteilung der Energie, die ein Stern abstrahlt, das *Spektrum*, enthält demnach Informationen über den Zustand der Sternatmosphäre. Gelingt es diesen Zustand und die einzelnen Prozesse zu beschreiben und mathematisch zu formulieren, so läßt sich ein numerisches Modell der untersuchten Sternatmosphäre entwickeln. Auf der Grundlage dieses Modells können *synthetische* Spektren errechnet werden. Aus dem Vergleich von synthetischen Spektren mit dem beobachteten Spektrum lassen sich Aussagen über die Atmosphäre des beobachteten Sterns, sowie über die Gültigkeit des Modells gewinnen. Dabei ist es wünschenswert, wenn mit Hilfe des Vergleichs fundamentale Parameter des beobachteten Sterns bestimmt werden können. In den folgenden Abschnitten wird die prinzipielle Vorgehensweise näher beschrieben.

2.1 Sternatmosphären und ihre Modellierung

Bei der Erstellung von Modellatmosphären müssen einerseits so viele Sachverhalte wie möglich vereinfacht werden und andererseits die wesentlichen Eigenschaften einer Sternatmosphäre erhalten bleiben. Nachdem in dieser Arbeit, wie in den meisten Fällen, zeitlich und räumlich variable Prozesse, wie etwa Granulation, Fleckenbildung oder Protuberanzen, nicht Gegenstand der Untersuchung sind, wird eine **stationäre** und **homogene** Sternatmosphäre angenommen. Diese Eigenschaft wird im Übrigen auch bei den Modellen des Sternaufbaus vorausgesetzt.

Die einfachste Annahme für eine Sternatmosphäre ist nun, daß sie sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet (**thermodynamic equilibrium (TE)**). Dies trifft allerdings nur zu, falls sich das Gas in einem abgeschlossenen, isothermen Behälter befindet. Die Energie des Systems ist dann auf die verschiedenen Freiheitsgrade des Gases gleichverteilt. Unabhängig von den einzelnen Mechanismen zwischen Strahlung und Materie ergibt sich die spektrale Verteilung der Energie aus der Temperatur des Systems. Die Verteilungsfunktion der Strahlung ist aus der Thermodynamik wohlbekannt - das Plancksche Strahlungsgesetz $B_\nu(T)$ aus Gleichung (1.3). Es ist klar, daß ein Stern kein abgeschlossenes, isothermes System ist. Die Beobachtung zeigt auch Abweichungen zwischen der Planckverteilung und der spektralen Energieverteilung, die ein Stern aussendet.

Der nächsteinfachste Ansatz zur Beschreibung einer Sternatmosphäre ist die Annahme eines lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (**local thermodynamic equilibrium (LTE)**). Dabei wird ausgenutzt, daß in den meisten Fällen die abgegebene Strahlung nur gering gegenüber dem Energieinhalt der Atmosphäre ist. Anstelle **einer** globalen Temperatur für die gesamte Sternatmosphäre ist die Temperatur nun tiefenabhängig. Die lokalen Gebiete in bestimmten Tiefen sollen sich bei dieser Modellannahme erneut im thermodynamischen Gleichgewicht befinden.

Schließlich ist es auch möglich Modellatmosphären zu berechnen, die sich in keinem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Dieser Fall spielt bei extrem dünnen und heißen Gasen eine wichtige Rolle. Bei den in dieser Arbeit betrachteten hauptreihenahen Sternen hat sich die Annahme von LTE bei den Modellatmosphären bisher als ausreichend erwiesen. Die Berechnung sogenannter non-LTE Modellatmosphären wird demnach nicht weiter behandelt.

Die Eigenschaften einer Modellatmosphäre ergeben sich nun durch

- die Energiemenge, die im Sterninneren erzeugt wird, und die Art und Weise, wie diese durch die Atmosphäre transportiert wird, bis sie als Strahlung den Stern verläßt.
- die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie in der Atmosphäre und damit auch durch die chemische Zusammensetzung des Gases.
- das hydrostatische Gleichgewicht zwischen der Schwerebeschleunigung, die versucht den Stern zu kontrahieren, und dem Strahlungsdruck sowie dem Gasdruck, die der Kontraktion entgegenwirken.

Ist die Tiefe der Sternatmosphäre nur gering im Vergleich zum Radius des Sterns, so kann als weitere häufig getroffene Annahme die Atmosphäre als **planparallel** behandelt werden. Dies trifft für die Sterne von der Hauptreihe bis zu den Anfangsstadien der Riesensterne problemlos zu. Unter den genannten Vereinfachungen können die drei oben aufgeführten Punkte bei der Modellierung von Sternatmosphären wie folgt realisiert werden.

2.1.1 Energietransport

Innerhalb einer Sternatmosphäre wird keine zusätzliche Energie erzeugt. Daher stellt die durch eine Atmosphäre transportierte Energiemenge eine Erhaltungsgröße dar. Als Transportmechanismen stehen folgende Möglichkeiten zur Verfügung:

- Strahlungstransport erfolgt durch die Emission von Photonen aus heißen in kühlere Schichten, die durch Absorption dieser Photonen erwärmt werden.
- Konvektion oder anderer hydrodynamischer Transport basiert auf dem Aufsteigen heißen Gases in höhere Schichten, die kühler sind. Dort gibt das Gas seine Energie an die Umgebung ab und sinkt abgekühlt in die heißeren Regionen zurück.
- Wärmeleitung wird schließlich durch Elektronen verursacht, die große Weglängen mit kinetischen Energien zurücklegen, die sie aus heißen Regionen erhalten haben. In den kühleren Gebieten erfolgt die Abgabe der kinetischen Energie an das Gas durch Kollision der Elektronen mit den Gasatomen.

2.1.1.1 Strahlungstransport

Zur Beschreibung von Strahlung und des Strahlungstransports werden zunächst die folgenden Definitionen einiger Strahlungsgrößen benötigt:

– **Die spezifische Intensität**

Die spezifische Intensität $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$, kurz I_ν , gibt dabei denjenigen Energiebetrag einer Strahlung im Frequenzbereich $(\nu, \nu + d\nu)$ an, die zur Zeit t in Richtung $\mathbf{n}$ ein Flächenelement dA in den Raumwinkel $d\Omega$ an dem Ort $\mathbf{r}$ durchsetzt:

$$dE = I_\nu dA \cos \theta d\Omega d\nu dt \quad (2.1)$$

Den Ausdruck $\cos \theta$ erhält man aus dem Skalarprodukt zwischen der Flächennormalen des Elements dA und dem Richtungsvektor $\mathbf{n}$.

– **Der Absorptions- und Emissionskoeffizient**

Der Absorptionskoeffizient κ_ν , der in der Astrophysik **Opazität** genannt wird, gibt den Bruchteil der Strahlungsenergie mit Intensität I_ν an, der innerhalb eines Volumenelements der Fläche dA und der Länge dz absorbiert wird. Der Kehrwert der Opazität ist die **mittlere freie Weglänge** eines Photons. Analog ist der von dem Volumenelement abgegebenen Energieanteil durch den Emissionskoeffizienten η_ν definiert.

$$dE_{\text{abs}} = \kappa_\nu I_\nu dA \cos \theta d\Omega d\nu dt \quad (2.2)$$

$$dE_{\text{em}} = \eta_\nu I_\nu dA \cos \theta d\Omega d\nu dt \quad (2.3)$$

– **Die mittlere Intensität und die Strahlungsdichte**

ergibt sich aus der Mittelung der Intensität über alle Raumwinkel $d\Omega$:

$$J(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\Omega \quad (2.4)$$

Wird die mittlere Intensität mit dem Faktor $\frac{4\pi}{c}$ multipliziert, so ergibt sich die Energiedichte der Strahlung innerhalb eines Volumenelements:

$$u(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{c} \oint I_\nu d\Omega \quad (2.5)$$

– **Der monochromatische Strahlungsstrom**

ist der Energiestrom der Strahlung mit der Intensität I_ν , der sich in der Ausbreitungsrichtung $\mathbf{n}$ bewegt. Wird eine beliebige radiale oder z-Richtung vorgegeben, so berechnet sich der monochromatische Strahlungsstrom nach:

$$\Phi(\mathbf{r}, \nu, t) = \oint I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (2.6)$$

– **Der monochromatische Strahlungsdruck**

Wird der Impulsübertrag der Lichtquanten an einer beliebig vorgegebenen x-y-Ebene betrachtet, so ergibt sich:

$$P^s(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{c} \oint I_\nu \cos^2 \Theta d\Omega \quad (2.7)$$

Zur Beschreibung des Strahlungstransports werde nun das Volumenelement $dA \cdot d\mathbf{r}$ von der Intensität I_ν in Richtung des Linienelements $d\mathbf{r}$ durchsetzt. Hierbei trete eine Intensitätsänderung dI_ν entlang des Linienelements auf, die mit Gleichung (2.1) als Energieänderung der Strahlung bei der Frequenz ν betrachtet werden kann. Der Betrag dieser Änderung muß aufgrund der Energieerhaltung gleich der Differenz von absorbierter und emittierter Strahlung bei dieser Frequenz sein. Mit Hilfe der Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) ergibt sich für eine zeitunabhängige Intensität:

$$\frac{dI_\nu}{d\mathbf{r}} = \eta_\nu - \kappa_\nu I_\nu \quad (2.8)$$

Die Gleichung (2.8) ist für ein beliebiges Koordinatensystem gültig. Legt man sich auf ein Koordinatensystem fest, so muß die Ableitung auf der linken Seite der Gleichung durch eine entsprechende Richtungsableitung ($\mathbf{n} \cdot \nabla$) ersetzt werden. Analog zur Gleichung (2.6) ergibt sich mit der Wahl einer bestimmten radialen oder z-Richtung der Zwischenwinkel $\cos\theta$. Mit der Definition einer zum Sternmittelpunkt anwachsenden **optische Tiefe** τ_ν und einer **Quellfunktion** S_ν

$$\tau_\nu := - \int_{z_a}^z \kappa_\nu dz \quad S_\nu := \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu} \quad (2.9)$$

kann die Gleichung (2.8) in der üblichen Form einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung erster Ordnung für planparallele Atmosphären geschrieben werden:

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu(\mu, \tau_\nu) - S_\nu(\tau_\nu) \quad (2.10)$$

Diese **Strahlungstransportgleichung** kann sowohl formal durch Integration, als auch numerisch durch Bildung entsprechender Differenzengleichungen gelöst werden, um bei gegebener Quellfunktion $S_\nu(\tau_\nu)$ die Intensitätsverteilung $I_\nu d\tau_\nu$ zu berechnen (Mihalas 1987). Als Ergänzung zur Transportgleichung, die aus der Energiebilanz bei einer festen Frequenz der Strahlung resultiert, wird jetzt der Beitrag aller Frequenzen zur Energiebilanz in einem Volumenelement betrachtet. Die gesamte absorbierte Energie und die emittierte Energie ergeben mit Gleichung (2.9):

$$\int_0^\infty \oint \kappa_\nu I_\nu d\Omega d\nu = 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu \quad (2.11)$$

$$\int_0^\infty \oint \eta_\nu d\Omega d\nu = 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu S_\nu d\nu \quad (2.12)$$

Aufgrund der Energieerhaltung muß die Menge der Strahlungsenergie, die in jedem Volumenelement absorbiert wird, gleich der Strahlungsenergie sein, die es emittiert. Die Atmosphäre befindet sich im sogenannten **Strahlungsgleichgewicht**:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu [J_\nu - S_\nu] d\nu = 0 \quad (2.13)$$

Zusammen mit der Gleichung (2.10) wird klar, daß das Problem des Strahlungstransports in planparallelen Sternatmosphären zur Frage nach der Frequenzverteilung der Strahlung wird, wobei der gesamte Strahlungsstrom durch das Atmosphärenmodell konstant bleibt. Somit erklärt sich der Zusammenhang mit Gleichung (1.4), die den **Gesamtstrahlungsstrom** Φ zugrundelegt, der aus einem Oberflächenelement eines Sterns heraustritt. Nach den Definitionen der Strahlungsgrößen ergibt sich der gesamte Strahlungsstrom durch *vollständige* Frequenzintegration:

$$\Phi = \int_0^\infty \Phi_\nu d\nu = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (2.14)$$

Sowohl zum besseren Verständnis des Strahlungstransports, als auch wegen seiner Bedeutung für den Sternaufbau (vgl. Abschnitte 3.1 und 4.3.1), soll abschließend eine weitere Näherung diskutiert werden. Die Lösung des Strahlungstransports wird insbesondere durch die Frequenzabhängigkeit der Strahlungsgrößen und der Opazität erschwert. Daher wird nun angenommen, daß eine *geeignete* Frequenzmittelung existiert, die in den bisherigen Gleichungen eine Ersetzung der frequenzabhängigen Größen durch über die Frequenz gemittelte Größen ermöglicht. In diesem Fall spricht man von einem **grauen** Strahlungstransport. Somit entfallen die Frequenzindizes bei allen bisherigen Gleichungen. Bei den Modellen des Sternaufbaus ist diese Näherung ausnahmslos in Gebrauch. Die Frage nach einer geeigneten Frequenzmittelung wird im Abschnitt 4.5.2 nochmals kurz aufgegriffen.

Wird die Strahlungstransportgleichung (2.10) mit dem Faktor $\cos\theta/c$ multipliziert und danach über das gesamte Raumvolumen integriert, so erhält man mit Hilfe der Definitionen von Strahlungsfluß (2.6) und Strahlungsdruck (2.7) unter Beachtung der Winkelunabhängigkeit der Quellfunktion S und der Gleichung (2.14):

$$\frac{dP^s}{d\tau} = \frac{\Phi}{c} = \frac{\sigma}{c} T_{\text{eff}}^4 \quad (2.15)$$

Wird nun in jeder Tiefe τ ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht angenommen, so ergibt sich lokal ein *isotropes* Strahlungsfeld. Diese Annahme ist im Gegensatz zu atmosphärischen Schichten im Sterninneren relativ gut erfüllt. Aus dem Strahlungsgleichgewicht (2.13) folgt im grauen Fall sofort die Gleichheit von Quellfunktion S und mittlerer Intensität J . Außerdem ergeben die Raumwinkelintegrationen der Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.7) über die jetzt winkelunabhängige Intensität:

$$P^s = \frac{1}{3}u = \frac{4}{3}\frac{\pi}{c}J = \frac{4}{3}\frac{\pi}{c}S \quad (2.16)$$

Schließlich entspricht im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht die Quellfunktion S der Planckfunktion (1.3) und mit dem Gesetz von Stefan-Boltzmann

$$\pi B(T) = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \sigma T^4 \quad (2.17)$$

ergibt Gleichung (2.16) den bekannten Zusammenhang:

$$P^s = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{c}T^4 \quad (2.18)$$

Der Strahlungstransport kann nun durch Einsetzen der obigen Gleichung (2.18) in Gleichung (2.15) gelöst werden:

$$\Phi = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{4\sigma}{3} T^4 \right) \quad (2.19)$$

Für den Sternaufbau wird die optische Tiefe mittels ihrer Definitionsgleichung (2.9) durch den Radius r ersetzt:

$$\Phi = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa} \frac{dT}{dr} \quad (2.20)$$

Dies entspricht einer **Diffusionsgleichung für den Strahlungstransport** mit der Diffusionskonstanten K_s :

$$K_s = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa} \quad (2.21)$$

Im Fall von Sternatmosphären läßt sich (2.19) entlang der optischen Tiefe τ integrieren. Zusammen mit (2.14) ergibt sich:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \tau + \text{const.} \quad (2.22)$$

Eine Näherungslösung für die noch fehlende Integrationskonstante ergibt sich aus der Annahme, daß am äußersten Sternrand bei $\tau = 0$ die Intensität nur noch in den *positiven* Halbraum strahlt. Es gibt also keine von außen auf den Stern einfallende Strahlung. Der Gesamtstrahlungsstrom errechnet sich somit gemäß Gleichung (2.6) zu (F ist dabei die mittlere Strahlungsintensität der Sternscheibe):

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi F \quad (2.23)$$

Aus der identischen Integration für die mittlere Intensität J ergibt sich unter der Annahme eines isotropen Strahlungsfeldes unter LTE ($J = B(T)$):

$$B(T) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2} F \quad (2.24)$$

Durch Gleichsetzung der mittleren Strahlungsintensitäten der letzten beiden Gleichungen und Verwendung von (2.17) ist die Randbedingung bei $\tau = 0$ gegeben und man erhält das **Eddingtonsche Temperatugesetz**:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (2.25)$$

Diese Temperaturschichtung ist im Fall eines diffusionsartigen, grauen Strahlungstransports gültig und stellt eine erste Näherung an den Temperaturverlauf in einer Modellatmosphäre dar. Die frequenzabhängige Behandlung des Strahlungstransports zeigt allerdings deutliche Abweichungen von der Eddingtonschen Temperaturschichtung. Im Abschnitt 4.3.1 wird dieser Sachverhalt noch eine Rolle spielen.

2.1.1.2 Konvektion

Ob der Energietransport in einer Sternatmosphäre durch Strahlung oder Konvektion erfolgt ist abhängig von der Temperaturänderung mit dem Radius, dem Temperaturgradienten. Eine sich bewegende Gasblase wird ihre Bewegung nur fortsetzen, wenn die Temperaturänderung in der Blase geringer bleibt, als in einer durch reinen Strahlungstransport gegebenen Umgebung. In diesem Fall wird beispielsweise eine warme Gasblase aufgrund ihres Auftriebs auch weiterhin aufsteigen bis sie ihre Energie nach Zurücklegung einer bestimmten Strecke an die Umgebung abgegeben hat. Der durch reinen Strahlungstransport gegebene Temperaturgradient ist somit steiler als der Temperaturgradient, der sich durch Konvektion einstellt. Wird die Gleichung (2.20) nach dem Temperaturgradienten aufgelöst, so ist sofort erkennbar, daß beispielsweise eine große Opazität das Auftreten von Konvektion begünstigt. Anders ausgedrückt wird der Strahlungstransport ineffizient, so daß eine sich bewegende Gasblase durch Abstrahlung nicht zuviel von ihrem ursprünglichen Energiegehalt verliert - ihre Bewegung also fortsetzt.

Die Modellierung der Konvektion stellt ein großes Problem dar, da Konvektion im Grunde ein *hydrodynamischer Prozeß* ist. Die numerische Lösung der hydrodynamischen Gleichungssysteme ist keine einfache Problemstellung und benötigt zur Berechnung von Modellatmosphären mehrere Tage Rechenzeit. In diesem Fall wird außerdem der Strahlungstransport aktueller Modelle beispielsweise von Asplund *et al.* (1999) auf nur vier Frequenzintervalle eingeschränkt. Wahrscheinlich wird erst eine weitere Entwicklung auf dem Gebiet der Rechenanlagen umfangreiche hydrodynamische Modelle zur Konvektion ermöglichen.

Um dennoch Konvektion in Modellatmosphären und Sternaufbaumodellen zu berücksichtigen gibt es Näherungen. Weit verbreitet ist die **Mischungswegtheorie**, bei der das Aufsteigen einer *mittleren* Gasblase um einen **Mischungsweg** Λ beschrieben wird. Aus Beobachtungen an der Sonne wurde festgestellt, daß dieser Mischungsweg in der Größenordnung der **Druckskalenhöhe** H_p liegt. Dabei ist die Druckskalenhöhe gegeben durch den Höhenunterschied in einer Atmosphäre, bei dem der Gasdruck um den Faktor $(1/e)$ abnimmt. Um die Druckskalenhöhe und die Mischungsweglänge in eine feste Beziehung zu setzen wird ein **Mischungswegparameter** α eingeführt:

$$\Lambda = \alpha H_p \quad (2.26)$$

Auf die Problematik den Mischungswegparameter zu eichen wird im Folgenden noch öfter eingegangen werden. Praktisch muß bei Einsetzen der Konvektion noch beachtet werden, daß nicht der gesamte Energietransport konvektiv erfolgt, sondern auch der Strahlungstransport berücksichtigt werden muß. In diesem Fall setzt sich der Gesamtenergiestrom sowohl aus einem *radiativen* als auch aus einem *konvektiven* Energiestrom zusammen. Eine nähere Beschreibung der Mischungswegtheorie erfolgt im Abschnitt 4.4.

2.1.1.3 Wärmeleitung

Die Wärmeleitung spielt in der Atmosphäre, sowie im Inneren von normalen Sternen keine große Rolle, da sie dort aufgrund der kurzen freien Weglänge der Elektronen sehr ineffizient ist. Sie ist in kompakten Sternen, Weißen Zwergen und Neutronensternen von Bedeutung, sowie in der Korona normaler Sterne. Nachdem Wärmeleitung ein Diffusionsprozeß ist, kann sie formal durch die Gleichung (2.20) beschrieben werden. Dabei muß anstelle der Strahlungsopazität κ nun eine Wärmeleitungsopazität κ_L eingeführt werden.

2.1.2 Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie

Die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie besteht in der frequenzabhängigen Absorption und Emission von Strahlung. Im Fall von LTE wird der Sachverhalt enorm vereinfacht, da die Zustandsgrößen wie Druck und Temperatur des Gases *lokal unabhängige* Eigenschaften werden. Als Zustandsgleichung kann die *ideale Gasgleichung* verwendet werden und eine Wechselwirkung zwischen den lokalen Schichten erfolgt nur durch den Energietransport. Für Letzteren werden die lokalen frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten κ_ν der Materie benötigt. Die Absorption teilt sich im Wesentlichen in drei Prozesse auf:

– gebunden-gebunden Übergänge oder Linienabsorption

Hierbei wird unter Absorption der Strahlung ein gebundenes Elektron von einem niedrigen Energieniveau auf ein höheres Energieniveau versetzt. Dies entspricht grundlegend einem *elektrischen Dipol*, der für seine Schwingungen Energie aus dem Strahlungsfeld entnimmt. Entsprechend ergibt sich mit der Dielektrizitätskonstanten ε_0 , der Elektronenmasse m_e , der Elektronenladung e , der Lichtgeschwindigkeit c , der Oszillatorstärke f , der Linienprofilfunktion $\Psi(\nu)$, der Besetzungszahl des unteren Energieniveaus N_m und einem Korrekturterm $E(\nu, t)$ für die stimulierte Emission als prinzipieller Ausdruck für die Opazität κ_ν :

$$\kappa_\nu = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\pi e^2}{m_e c} \cdot f \cdot \Psi(\nu) \cdot N_m \cdot E(\nu, T) \quad (2.27)$$

Die Profilmfunktion und der Korrekturterm für stimulierte Emission stammen meist aus quantenmechanischen Rechnungen. Die Besetzungszahl des unteren Niveaus läßt sich im LTE einfach berechnen. Bei einem nicht ionisierten Gas erfolgt sie nach der Boltzmann-Statistik. Sind N_i die jeweiligen Besetzungszahlen zweier unterschiedlicher Energieniveaus n und m , g_i die entsprechenden statistischen Gewichte, ν_{nm} die Frequenz des Lichtquants, der beim Übergang zwischen den beiden Niveaus absorbiert oder emittiert wird, T die lokale Temperatur des Gases, k die Boltzmannkonstante und h das Plancksche Wirkungsquantum, so gilt:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left(-\frac{h\nu_{nm}}{kT}\right) \quad (2.28)$$

Da bei Sternatmosphären das Gas zum Teil ionisiert vorliegt, muß bei der Verteilungsstatistik berücksichtigt werden, daß die Energie auch auf die kinetische Energie der ionisierten Elektronen verteilt werden kann. Dies führt zur Saha-Boltzmann-Statistik, bei der $N_{m,0}$ die Besetzungszahl für das Grundniveau eines m -fach ionisierten Atoms ist. Die Besetzungszahl des Grundzustands eines $(m+1)$ -fach ionisierten Atoms kann mittels der Ionisierungsenergie des m -fach geladenen Ions χ_m , der Teilchenzahldichte der Elektronen N_e der Elektronenmasse m_e , sowie den statistischen Gewichten der beiden Grundzustände $g_{m,0}$ und $g_{m+1,0}$ ermittelt werden, wobei alle anderen physikalischen Größen den Größen aus Gleichung (2.28) entsprechen:

$$\frac{N_{m,0}}{N_{m+1,0}} = N_e \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{g_{m,0}}{g_{m+1,0}} \exp\left(\frac{\chi_m}{kT}\right) \quad (2.29)$$

Nachdem bei der Ermittlung der Besetzungszahlen die statistischen Gewichte g_i bzw. $g_{i,0}$ eingehen, werden Oszillatorenstärke f aus der Gleichung (2.27) und statistisches Gewicht oftmals zum sogenannten **gf -Wert** zusammengefaßt. Die Bestimmung der gf -Werte stellt vielfach ein Problem dar. Es existieren nämlich sowohl unterschiedliche Laborwerte, als auch die Möglichkeit *astrophysikalische* gf -Werte zu ermitteln (s. Abschnitt 2.2).

– gebunden-frei Übergänge oder Ionisation bzw. Rekombination

Hierbei handelt es sich um einen *kontinuierlichen* Absorptionsprozeß, da bei der Ionisation ein nicht diskreter Energiebetrag auf die kinetische Energie des frei werdenden Elektrons verteilt werden kann. Prinzipiell läßt sich ein ähnlicher Ausdruck wie Gleichung (2.27) herleiten, in dem die Profildfunktion durch einen kontinuierlichen Term ersetzt wird, der ab einer gegebenen Grenzwellenlänge einsetzt.

– frei-frei Übergänge oder Streuprozesse

Ebenso sind die frei-frei Übergänge ein kontinuierlicher Prozeß, bei dem Elektronen, die sich im Coulombfeld von Ionen befinden, ihre kinetische Energie durch Absorption von Strahlung vergrößern. Bei der Berechnung dieser Opazität gehen sowohl die Elektronen- als auch die Ionendichte ein. Diese lassen sich mit Hilfe des *idealen Gasgesetzes* ermitteln.

Ein Problem bei der Berechnung von Opazitäten liegt in der großen Anzahl der Opazitätsquellen. So sind beispielsweise zur Berechnung der Linienopazitäten *mehrere Millionen* Linienübergänge zu berücksichtigen. Würden zu einer Modellatmosphäre alle Linienübergänge berechnet werden, müsste ein Programm unter Umständen mehrere Tage Zeit für die Modellrechnungen aufwenden. In der Praxis kann das Spektrum in Frequenzintervalle aufgeteilt werden. Für diese Intervalle werden nun unter gegebenen Druck und Temperatur die Opazitäten berechnet und eine Verteilungsfunktion für deren Häufigkeit innerhalb des Intervalls erstellt. Damit läßt sich für das Intervall eine Art künstliches Linienprofil berechnen, das den Opazitäten innerhalb des Intervalls entspricht. Dieses Verfahren wurde von Kurucz (1979) für alle Intervalle und verschiedene Druck und Temperaturwerte wiederholt und das Ergebnis tabelliert. Auf die Tabellen kann dann während der Modellrechnung zurückgegriffen werden. Aufgrund der Verteilungsfunktion werden die Tabellen als **opacity distribution function (ODF)** bezeichnet. Die Benutzung von ODF-Tabellen ist derzeit gängige Praxis, hat allerdings den Nachteil, daß die Tabellen nur für bestimmte chemische Zusammensetzungen der Sternatmosphäre vorhanden sind.

Eine andere Möglichkeit, die bereits von Peytremann (1974) angewandt wurde, trägt die Bezeichnung **opacity sampling (OS)**. Dabei werden an zufällig verteilten Frequenzstützstellen während der Modellrechnung alle Opazitäten bestimmt, die einen nennenswerten Beitrag liefern. Dies sind also nicht mehr alle Millionen Linien, sondern nur noch eine kleinere Unterauswahl. Durch Variation der Stützstellenanzahl kann herausgefunden werden, ab welcher Anzahl eine ausreichende Repräsentation der Sternatmosphäre gewährleistet ist. Tritt bei der Erhöhung der Stützstellenanzahl keine signifikante Änderung der Modellatmosphäre auf, so spielt die Anzahländerung auch keine Rolle mehr. Das Verfahren ist zwar rechenintensiver als mit ODF-Tabellen, kann aber für beliebige chemische Häufigkeiten ad hoc angewandt werden.

2.1.3 Hydrostatisches Gleichgewicht

Als letzter Punkt bei der Berechnung von Modellatmosphären bleibt noch die Berücksichtigung des hydrostatischen Gleichgewichts. Unter Verwendung von Gleichung (2.15) und der Definition der optischen Tiefe (2.9) ergibt sich mit der Schwerebeschleunigung g und der Gasdichte ρ für den Gasdruck P in einer planparallelen Atmosphäre:

$$\frac{dP}{dz} = g\rho - \frac{\kappa}{c}\Phi \quad (2.30)$$

2.1.4 Modellrechnungen

Die Berechnung einer LTE-Modellatmosphäre läuft nach der bisherigen Beschreibung auf die Lösung der Strahlungstransportgleichung (2.10) und des konvektiven Energietransports unter der Erhaltung des Gesamtenergiestroms hinaus. Dabei treten alle lokalen Größen, wie Opazitäten, Planckfunktion, Sahagleichung und ideales Gasgesetz im Prinzip als Funktion der lokalen Temperatur auf.

Entsprechend wird die Modellatmosphäre anhand einiger Tausend Frequenzstützstellen und knapp Hundert Tiefenpunkten durch ein iteratives Verfahren bestimmt, bei dem die Temperaturwerte schrittweise korrigiert werden, bis eine konsistente Lösung vorliegt. Als Ausgangsnäherung kann beispielsweise eine Edingtonsche Temperaturschichtung (2.25) dienen. Als Iterationstechnik erfreut sich ein bereits von Newton gefundenes Verfahren, daß auch bei der Lösung des Sternaufbaus verwendet wird, entsprechender Beliebtheit (s. Abschnitt 3.3).

Um ein bestimmtes Modell zu erhalten müssen mehrere Parameter vorgegeben werden. Die Effektivtemperatur bestimmt den gesamten Energiestrom, der durch die Atmosphäre transportiert wird. Die Schwerebeschleunigung legt die Abhängigkeit von Masse und Radius eines Sterns fest und schließlich ist auch eine Häufigkeitsverteilung der chemischen Elemente vorzugeben. In den ODF-Tabellen ist des weiteren noch der Parameter *Mikroturbulenz* vorgegeben, der im nächsten Abschnitt nochmals aufgegriffen wird.

2.2 Spektrumsynthese und Parameterbestimmung

Mit der Erstellung von Modellatmosphären ist auch ein erster Grundstein zur synthetischen Reproduktion beobachteter Spektren gelegt. Die Gewinnung von Spektren, die eine möglichst genaue Bestimmung stellarer Parameter erlauben, ist ein Thema für sich. Im Folgenden wird an einem Beispiel nur auf die Problematik eingegangen gute stellare Parameter aus einer Spektrumsynthese zu gewinnen und daraus Altersbestimmungen zu erhalten. In den Jahren 1990 bis 1993 wurden innerhalb der Arbeitsgruppe **Kühle Sterne** hauptsächlich durch Axer und Fuhrmann Spektren von 115 Sternen aufgenommen (Axer *et al.* 1994). Dabei wurde sowohl mit Instrumenten an den 3.6m, 1.52m und 1.4m ESO Teleskopen auf La Silla in Chile beobachtet, als auch mit Instrumenten am 3.6m und 2.2m Teleskop auf dem Calar Alto in Spanien. Nachdem die Spektren keine vollständige spektrale Überdeckung der Wellenlängenbereiche aufwiesen, die zur stellaren Parameterstudie benötigt wurden, mussten etwa 2000 Einzelspektren gewonnen werden. Die spektrale Auflösung $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ war in den aufgenommenen Spektralbereichen (390-530 nm und 645-660 nm) kleiner 20000. Das Signal zu Rausch Verhältnis lag typischerweise bei Werten im Bereich 30 bis 50.

Von der mit Hilfe einer CCD-Kamera gewonnenen Aufnahme des Rohspektrums bis zum fertig reduzierten Spektrum, mit dem die stellaren Parameter bestimmt werden, sind mehrere Schritte notwendig:

- Bei der **Extraktion des Spektrums** aus der CCD-Aufnahme müssen sowohl die Pixel zu Pixel Variationen des CCD-Chips berücksichtigt werden, als auch dessen Dunkelstrom. Des weiteren erfolgt eine Streulichtkorrektur und die gewichtete Addition der spektralen Information aus mehreren Pixeln.
- Die Bestimmung der Wellenlängenlage auf dem CCD-Chip erfolgt durch eine **Wellenlängenkali-
bration**, die mit Hilfe eines Vergleichslichtspektrums erfolgt (meist einer Thorium-Argon Lampe).
- Bei den Spektren ist der Energiestrom nicht absolut bestimmt, so daß relative Spektren gewonnen werden. Dabei wird der Verlauf des Kontinuums auf 1.0 normiert. Dieser Vorgang, der als **Kontinuumsrektifizierung** bezeichnet wird, ist nicht immer ganz einfach. In Regionen mit großer Linienhäufigkeit wird das Kontinuum nicht mehr erreicht und somit ist auch eine Normierung nur schwer durchführbar.
- Nachdem die Sterne sich in radialer Richtung auf den Beobachter zu oder von ihm weg bewegen können, tritt auch eine Dopplerverschiebung im Spektrum auf. Durch entsprechende Korrektur der Wellenlängenlage von spektralen Signaturen kann die **Radialgeschwindigkeit** bestimmt werden und das Spektrum auf Ruhewellenlängen normiert werden.
- Schließlich können mehrere sich überlappende Spektralbereiche zu einem zusammenhängenden Spektrum verknüpft werden. Im Fall von mehreren Spektren im selben Wellenlängenbereich für einen Stern kann eine **Koaddition** der Spektren erfolgen. Dabei ist eine entsprechende Gewichtung guter Belichtungen gegenüber schlechteren Belichtungen möglich.

Zur Erstellung der entsprechenden synthetischen Spektren werden die Modellatmosphären herangezogen. Aufgrund der berechneten Temperatur-, Druck- und Dichteschichtung, kann der Strahlungstransport im betrachteten Wellenlängenintervall nochmals detailliert für Linien und andere Opazitäten berechnet werden. Dieser Schritt wird als **line formation** bezeichnet. Dabei werden nun auch die verschiedenen Linienverbreiterungsmechanismen im Einzelnen berücksichtigt. In die Modellatmosphäre ging nur die **Mikroturbulenz** als wählbarer Linienverbreiterungsmechanismus ein, die im Prinzip eine ungerichtete Turbulenzbewegung in der Atmosphäre darstellt. Im Einzelnen sind aber zu berücksichtigen:

- Strahlungsdämpfung
- Dopplerverbreiterung in Form von thermischer Dopplerverbreiterung, Makroturbulenz und Mikroturbulenz
- Druckverbreiterung in Form von linearem Starkeffekt, quadratischem Starkeffekt, Eigendruckverbreiterung und van der Waals Verbreiterung

Die Behandlung der einzelnen Mechanismen ist in Unsöld (1968), Fuhrmann (1993) oder Reetz (1999) beschrieben.

Aus dem Vergleich von synthetischen und beobachteten Spektren lassen sich als nächstes stellare Parameter ableiten. Mit einem Gitter von Modellatmosphären unterschiedlicher Schwerebeschleunigungen, Effektivtemperaturen, chemischen Häufigkeiten und Mikroturbulenzen wird das synthetische Spektrum berechnet, das das beobachtete Spektrum am besten wiedergibt. Sind keine Mehrdeutigkeiten in den Auswirkungen der Parameter auf die Spektren vorhanden, so müssen die Parameter des am besten passenden synthetischen Spektrums auch die Parameter des beobachteten Sterns sein.

Im Allgemeinen wird bei der Parameterbestimmung schrittweise und iterativ vorgegangen. Die Effektivtemperatur kann beispielsweise für kühle Sterne mit Hilfe der *Balmerlinien des Wasserstoffs* bestimmt werden. Anhand der Sonne und einiger weiterer Referenzsterne konnte Fuhrmann (1993) zeigen, daß die Linienprofile der Balmerlinien im Wesentlichen durch die Effektivtemperatur und den Parameter der Mischungsweglänge α bestimmt werden. Nachdem die Effektivtemperatur eines Sterns aus der Bestimmung mit jeder einzelnen Balmerlinie konsistent sein muß, kann bei Sternen bekannter Effektivtemperatur zuerst der Mischungswegparameter geeicht werden. Dabei stellte sich heraus, daß gemäß der Mischungswegtheorie nach Böhm-Vitense ein Parameter von $\alpha \approx 0.5$ gewählt werden muß, um mit den Balmerlinien eine konsistente Effektivtemperatur zu erhalten.

Diese Wahl trifft für Sterne unterschiedlicher stellarer Parameter zu, so daß der Mischungswegparameter hiermit allgemein festgelegt ist. Der Sachverhalt wird in den Abschnitten 4.3.1 und 4.4 noch von besonderer Bedeutung sein. Analog zu den Balmerlinien werden mittels weiterer spektraler Signaturen die Parameter *Schwerebeschleunigung*, *chemische Häufigkeit* und *Mikroturbulenz* aus den Linienprofilen bestimmt.

Bei der chemischen Häufigkeit sei noch erwähnt, daß zumeist die **Eisenhäufigkeit** stellvertretend für alle **Metalle** ermittelt wird. In der Astrophysik werden alle Elemente außer Wasserstoff und Helium als Metalle bezeichnet und in der Spektroskopie werden die **chemischen Häufigkeiten** $\varepsilon(X)$ eines Elements X auf die Wasserstoffhäufigkeit bezogen. Die Teilchenzahl $N(X)$ des Elements X und die Teilchenzahl $N(H)$ des Wasserstoffs erfüllen folgende Beziehung:

$$\log \varepsilon(X) = \log \left(\frac{N(X)}{N(H)} \right) + 12 \quad (2.31)$$

Im Gegensatz zu den spektroskopischen Häufigkeiten verwendet die Sternentwicklung sogenannte **Massenbruchteile** X_i . Sie lassen sich aus den Atomgewichten m_i , der mittleren Dichte ρ und der Anzahl der betrachteten Nukleonen pro Volumen n_i ermitteln:

$$X_i = \frac{m_i n_i}{\rho} \quad (2.32)$$

Des weiteren werden die spektroskopischen Häufigkeitsangaben für Sterne $\varepsilon(X)_*$ oft durch folgende Schreibweise in Beziehung zu den solaren Häufigkeitswerten $\varepsilon(X)_\odot$ gesetzt:

$$[X/H] = \log \varepsilon(X)_* - \log \varepsilon(X)_\odot \quad (2.33)$$

Bei der spektroskopischen Ermittlung der chemischen Häufigkeiten gehen auch die atomphysikalischen *gf*-Werte aus dem Abschnitt 2.1.2 ein. Leider besitzen die von verschiedenen Arbeitsgruppen im Labor ermittelten *gf*-Werte eine nicht zu vernachlässigende Streuung, so daß die Bestimmung der Eisenhäufigkeit von den unterschiedlichen *gf*-Werten abhängt.

Werden beispielsweise Sonnenspektren mit bestimmten gf -Werten aus dem Labor analysiert, so ergibt sich eine Eisenhäufigkeit von $\log \varepsilon(\text{Fe}) = 7.67$ (Blackwell *et al.* 1984). Daher wurden die verfügbaren ODF-Tabellen mit dieser Eisenhäufigkeit berechnet. Andererseits kann aus Funden und Analysen eisenhaltiger Meteorite die solare Eisenhäufigkeit zu $\log \varepsilon(\text{Fe}) = 7.51$ bestimmt werden (Biémont *et al.* 1991). Eine geänderte Eisenhäufigkeit hat in den Modellatmosphären auch Auswirkungen auf die Temperaturschichtung.

Um die gesamte Problematik in den Griff zu bekommen, ist eine Entscheidung zu Gunsten eines der beiden Werte notwendig. Aufgrund ihrer Modellierung von Sternatmosphären verwendet die Arbeitsgruppe *Kühle Sterne* die meteoritische Eisenhäufigkeit. Als Folge müssen die gf -Werte an der Sonne angepaßt werden. Hierzu werden in der Spektrumsynthese eines Sonnenspektrums die gf -Werte des Eisens für die betrachteten Linien derart geändert, daß die synthetischen Linienprofile den beobachteten Profilen entsprechen. Die so geeichten gf -Werte werden als **astrophysikalische** gf -Werte bezeichnet. Die obige Schilderung gibt einen Einblick in die Komplexizität genauer Parameterbestimmungen von Sternen. Erst nachdem die Parameter der beobachteten Sterne bestimmt wurden, konnten Sternentwicklungsmodelle einen weiteren Aufschluß zu den Entwicklungsstadien der 115 Programmsterne bieten.

2.3 Bestimmung der Entwicklungsstadien von Sternen

Die Einzelheiten zur Durchführung von Sternentwicklungsmodellen werden in den nächsten beiden Kapiteln noch ausführlicher dargelegt. Auf die im letzten Abschnitt erwähnten 115 Sterne wurden von Axer diverse Entwicklungsrechnungen angewandt um das jeweilige Entwicklungsstadium der Sterne zu bestimmen (Axer 1993, Axer *et al.* 1994). Nachdem sich die Eisenhäufigkeit der betrachteten Sterne von solaren Werten bis $[\text{Fe}/\text{H}] = -3.1$ erstreckt kamen als verwendbare Entwicklungsrechnungen im Wesentlichen nur die Modelle von VandenBerg & Bell (1985) in Frage. Die Entwicklungsrechnungen anderer Gruppen und Autoren überdeckten entweder nicht den benötigten Metallizitätsbereich oder bezogen sich nicht auf massearme Sterne. Die Programmsterne wurden in drei Untergruppen gemäß ihrer Eisenhäufigkeit eingeteilt und ihre Positionen in ein modifiziertes Hertzsprung-Russell-Diagramm eingetragen.

In diesem Diagramm wird anstelle der Leuchtkraft der Logarithmus der Schwerebeschleunigung gegen die Effektivtemperatur angetragen. Der Zusammenhang zwischen diesem Diagramm und dem im Abschnitt 1.3 eingeführtem Hertzsprung-Russell-Diagramm kann mit Hilfe der Gleichung (1.5) und der bekannten Definitionsgleichung der Schwerebeschleunigung hergestellt werden:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \quad (2.34)$$

Der Vorteil dieser Form des Hertzsprung-Russell-Diagramms liegt in der Möglichkeit die rein spektroskopisch gewonnenen Parameter Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung für eine Alters- und Massenbestimmung zu verwenden. Abbildung 2.1 zeigt, daß die Mehrzahl der metallarmen Sterne rechterhand der 18 Milliarden Jahre (Gy) **Isochrone** zu liegen kommen. Sterne *gleichen* Entwicklungsalters sind durch eine gemeinsame Isochrone verbunden. Nachdem jüngere Sterne offensichtlich bei gleicher Schwerebeschleunigung eine höhere Effektivtemperatur aufweisen, ergeben sich größtenteils Alter weit über 20 Gy. Ebenso besitzen die Sterne solarer Metallizität Alter über 8 Gy.

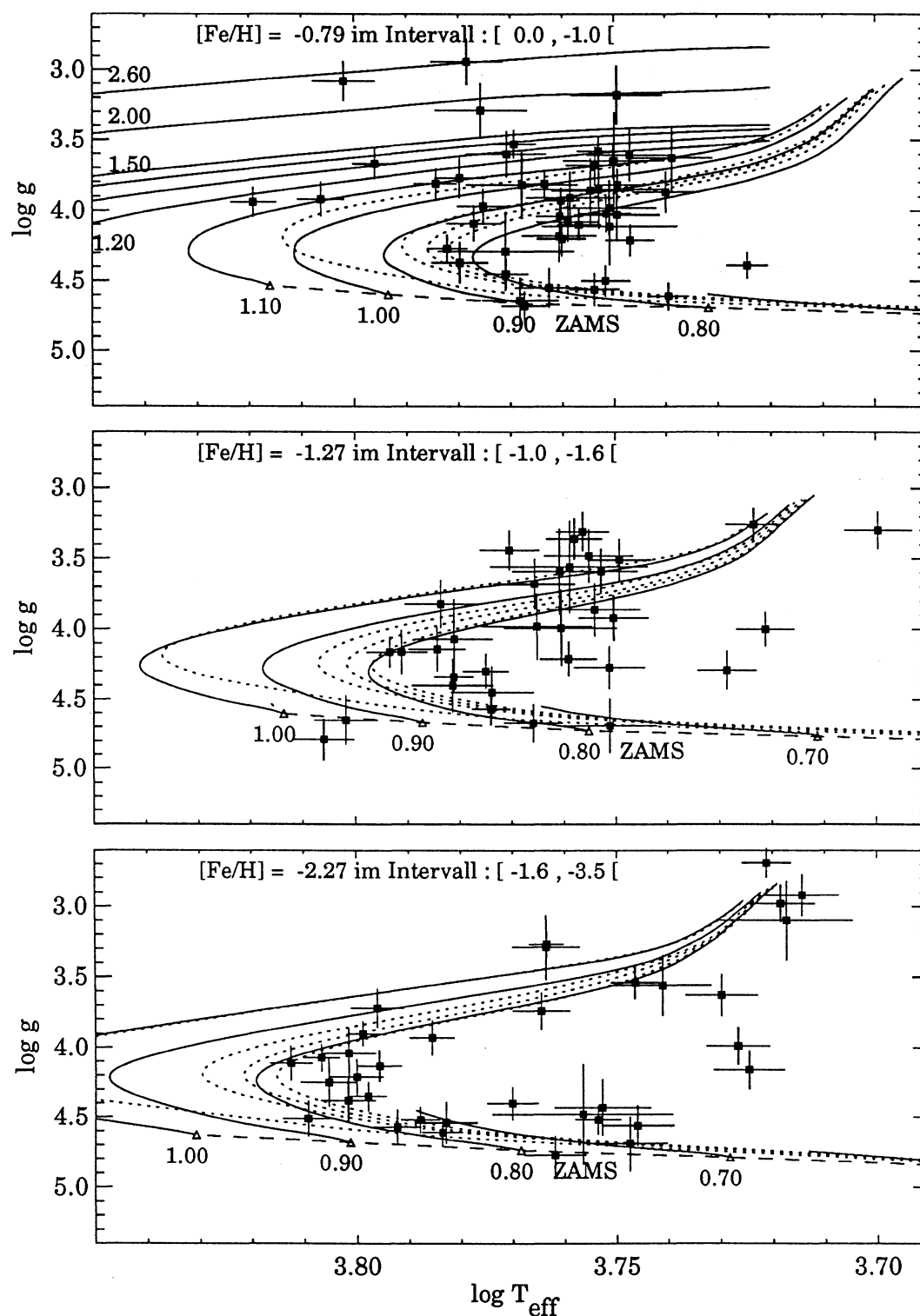


Abbildung 2.1 LTE-Sternparameter mit ihren Fehlerbalken angewandt auf Entwicklungsmodelle von VandenBerg & Bell für drei Metallizitätsintervalle. Die durchgezogenen Linien entsprechen den Entwicklungswegen für Sterne von $0.6 - 2.6 M_{\odot}$, wie angegeben. Die gepunkteten Linien von links nach rechts entsprechen den Isochronen von 8, 14, 16 und 18 Gy. Die Nullalter-Hauptreihe wurde gestrichelt eingezeichnet (Axer 1993).

Dieses Ergebnis stellt einen *starken Gegensatz* sowohl zu den kosmologischen Modellen, als auch zu den Modellvorstellungen der Galaxienbildung dar. Nach derzeitigen Vorstellungen wurden zum Urknall hauptsächlich nur die Elemente Wassertoff und Helium gebildet. Die weiteren uns bekannten Elemente ergaben sich einerseits durch Kernfusion in den Sternen und andererseits durch Supernovae. Aus entsprechenden Betrachtungen zur Synthese der diversen chemischen Elemente und ihrer Isotope, der sogenannten **Nucleosynthese**, wurde beispielsweise über Häufigkeitsverhältnisse das Alter von metallarmen Sternen zu 15.6 ± 4.6 Gy abgeschätzt (Cowan *et al.*, 1999). Allerdings sind diese Angaben mit Unsicherheiten behaftet, da die Erzeugungsraten schwerer Elemente in Supernovae nicht experimentell sondern nur theoretisch bekannt sind. Weiterhin ergibt die Altersbestimmung von Kugelsternhaufen, die zu den ältesten Sternansammlungen gerechnet werden Werte zwischen 12-18 Gy (VandenBerg 1983, Iben & Renzini 1984). Schließlich läßt sich das Weltalter auch mit Hilfe der Expansion des Weltalls eingrenzen. So folgt aus einer aktuellen Bestimmung der *Hubblekonstanten* ein Weltalter von 14 ± 2 Gy (Friedmann 2000). Durch Änderung der Weltmodelle lassen sich aber durchaus auch höhere Alter erzielen, so daß die hohen Alter der 115 Programmsterne hauptsächlich im Widerspruch zum Alter der Kugelsternhaufen und der Nukleosynthesemodelle stehen. Selbst die Metallärmsten der 115 Sterne weisen noch ausreichende Metallhäufigkeiten auf, um sie nicht zu der allerersten Sterngeneration rechnen zu können.

Um dieser Problematik entgegenzutreten wurden die Isochronen und Entwicklungswege innerhalb der Hertzsprung-Russell-Diagramme zu kühleren Temperaturen verschoben, wodurch sich mit den verschiedenen Theorien relativ konsistente Alter ergaben. Die Verschiebung der Entwicklungsmodelle innerhalb der Hertzsprung-Russell-Diagramme bedarf allerdings einer wissenschaftlich haltbaren Begründung. Hierzu wurden von Axer (1993) mehrere Punkte als Rechtfertigung angeführt:

- Die Entwicklungsmodelle von VandenBerg & Bell (1985) besitzen für Helium einen Massenbruchteil von $Y=0.20$, während als primordiale Heliumhäufigkeit Werte im Bereich $Y=0.23-0.24$ bestimmt wurden (Denegri *et al.* 1990, Olive *et al.* 1997).
- Die äußere Randbedingung bei den üblichen Sternaufbaurechnungen begnügt sich mit einer Diffusionsnäherung nach Gleichung (2.20) bis zum oberen Rand der Sternatmosphäre bei der optischen Tiefe $\tau \approx 2/3$. Je nach gewählter Abschlußbedingung an diesem Punkt ergeben sich allerdings leicht unterschiedliche Effektivtemperaturen für die Sternmodelle. VandenBerg & Bell (1985), sowie Chieffi & Straniero (1989) zeigten die Variation der Effektivtemperatur anhand einzelner Untersuchungen.
- Die Entwicklungsmodelle von VandenBerg & Bell (1985) sind zwar auch für extrem metallarme Sterne vorhanden, allerdings wurden für die Metallhäufigkeiten untereinander solare Verhältnisse angenommen. Andererseits konnte spektroskopisch nachgewiesen werden, daß bei metallarmen Sternen die sogenannten α -Elemente (O, Mg, Si, S, Ca, Ti) eine Überhäufigkeit in der Größenordnung $[\alpha/\text{Fe}] \approx 0.4$ aufweisen. Eine Berücksichtigung dieser Tatsache ändert erneut die Lage der Entwicklungswege und Isochronen.
- In mehreren Untersuchungen wurde festgestellt, daß der Mischungswegparameter nicht zwingend über den gesamten Entwicklungsverlauf einen konstanten Wert besitzt (VandenBerg & Laskarides 1987, VandenBerg 1991). Insbesondere für Entwicklungsmodelle zum Stern Groombridge 1830 wurde der Mischungswegparameter geändert um die Position des Sterns im HRD zu erreichen. Diese Variation zieht weitere Verschiebungen der Entwicklungswege im HRD nach sich.

Neben den zuletzt genannten Argumenten sollte noch erwähnt werden, daß selbst die Positionen der 115 Einzelsterne noch in den Hertzsprung-Russell-Diagrammen leicht verschoben werden mußten, da die Isochronen für *bestimmte* Metallizitäten eingetragen wurden, die Sterne aber individuell leichte Abweichungen zu diesen Metallizitäten aufweisen.

Als Resumee aus der Arbeit von Axer, Fuhrmann und Gehren (1994) kann man Folgendes festhalten: **Der allgemeine Status bei den Sternentwicklungsmodellen ist sehr unbefriedigend. Die Notwendigkeit Entwicklungswege und Isochronen im Hertzsprung-Russell-Diagramm zu verschieben kann in Wirklichkeit nicht auf eindeutige physikalische Ursachen zurückgeführt werden. Zwar sind einige Anhaltspunkte durchaus untersucht worden, jedoch besitzen diese Untersuchungen keine strenge Systematik. Dies liegt daran, daß verschiedene Gruppen mit unterschiedlichen Programmen und Eingangsdaten die Effekte untersucht haben. Insgesamt stellt sich die Frage, ob den Altersangaben Vertrauen geschenkt werden darf. Eine systematische Untersuchung der Problemstellung ist dringend erforderlich, wenn eine verlässliche Altersbestimmung erfolgen soll.**

Entsprechend dieser Ausgangssituation sollen die nun folgenden Kapitel *Licht ins Dunkel* bringen und eine systematische Untersuchung der Eingangsparameter zur Sternentwicklung und ihre Auswirkungen auf eine Altersbestimmung erfolgen. Ziel ist eine verlässliche Altersbestimmung für Sterne ohne Verschiebung der Entwicklungswege im Hertzsprung-Russell-Diagramm zu ermöglichen.

3. Sternaufbau und Sternentwicklung

In erster Näherung können Sterne als *sphärisch symmetrische Gaskugeln* behandelt werden. Insbesondere massearme, hauptreihennahe Sterne genügen dieser Annahme, so daß im weiteren Verlauf dieser Arbeit von der sphärischen Symmetrie ausgegangen wird. Die grundlegenden Gleichungen zum Sternaufbau haben in diesem Fall eine relativ einfache Struktur. Allerdings liegt die Tücke im Detail, wie im nächsten Abschnitt noch erläutert wird. Die Lösung des Gleichungssystems und die notwendigen Kalibrierungen anhand der Sonne werden dann weiterer Gegenstand dieses Kapitels sein. Damit wird zuerst ein Überblick zu den allgemeinen Verfahren der Sternentwicklung gegeben, wie sie in Cox & Giuli (1968), Clayton (1983) oder Kippenhahn & Weigert (1990) ausführlich dargestellt sind, bevor im nächsten Kapitel die einzelnen Untersuchungen beschrieben werden.

3.1 Die Grundgleichungen des Sternaufbaus

Wird bei Sternen davon ausgegangen, daß sie sich vollständig im gasförmigen Zustand befinden und wird beachtet, daß sie in ihrer Entwicklung keine allzu plötzlichen Änderungen aufweisen, so ergibt sich die erste Grundgleichung aus dem **hydrostatischen Gleichgewicht**. Demgemäß stellt sich ein Ausgleich zwischen dem Gasdruck $P(r)$ an einem bestimmten Radius r und der Schwerkraft der über diesem Radius liegenden Gasschichten ein. Mit m als Masse, die innerhalb der betrachteten Sphäre mit Radius r liegt und unter der vereinfachenden Weglassung der Ortsabhängigkeit der physikalischen Variablen in den folgenden Gleichungen ($\rho := \rho(r)$) gilt:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \frac{Gm}{r^2} - \rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite in obiger Gleichung trägt den dynamischen Prozessen Rechnung, wie Ausdehnung oder Kontraktion.

Die Änderung der Leuchtkraft $L(r)$ in einer Sphäre des Radius r muß durch Erzeugung oder Speicherung von Energie erfolgen. Ist die nukleare Energieerzeugungsrate ε pro Masse am Ort r bekannt, so bleibt als weitere Möglichkeit noch die Änderung der innerhalb einer Masse gegebenen Wärmemenge Q . Die zweite Grundgleichung lautet mit dem bekannten Zusammenhang $dQ = T \cdot dS$ zwischen Wärme und Entropie S :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \left[\varepsilon - T \frac{\partial S}{\partial t} \right] \quad (3.2)$$

Bei den nuklearen Reaktionen werden auch *Neutrinos* erzeugt, die ohne weitere nennenswerte Wechselwirkung den Stern verlassen. Der entsprechende Energieverlust, kann in Form einer *negativ* zu addierenden Energieerzeugungsrate ε_ν formuliert werden.

Der Temperaturgradient bezüglich des Radius ist im Fall von reinem Strahlungstransport schon durch die Gleichung (2.20) gegeben. Mit Hilfe der Definitionsgleichungen für die Effektivtemperatur (1.4) und der Leuchtkraft (1.5) wird daraus:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{L}{4\pi r^2} \frac{3\kappa}{16\sigma T^3} \quad (3.3)$$

Im Fall von konvektiven Energietransport findet oft der logarithmische Temperaturgradient gegenüber dem Gasdruck Verwendung:

$$\nabla \equiv \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial P} \quad (3.4)$$

Somit kann die Gleichung (3.3) mit Hilfe der Gleichung (3.1) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \frac{\partial T}{\partial P} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \frac{T}{P} \nabla \quad (3.6)$$

Liegt der Fall von reinem Strahlungstransport vor, dann ergibt ein Vergleich der Gleichungen (3.3) mit (3.6) den Strahlungstransportgradienten ∇_{rad} . Wird gleichzeitig noch der **Massenabsorptionskoeffizient** κ_m eingeführt, der sich aus der Division des volumenspezifischen Absorptionskoeffizienten κ durch die Dichte ρ ergibt, so folgt:

$$\nabla_{rad} := \frac{3\kappa_m LP}{64\pi Gm\sigma T^4} \quad (3.7)$$

Die Berechnung des Temperaturgradienten ∇ für Konvektion wird im Abschnitt 4.4 behandelt. Als letzte Strukturgleichung bleibt noch die Gleichung für den Massenerhalt:

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \quad (3.8)$$

Mit obigen vier Grundgleichungen kann prinzipiell die Struktur eines Sterns zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnet werden. Als freie Variable zur Parametrisierung der Größen P, T, L und M wurde der Radiusort r verwendet. In der Praxis ist es günstiger die vom Radius r eingeschlossene Masse m als freie Variable zu wählen. Mit Hilfe der Gleichung (3.8) erhält man die allgemein üblichen Strukturgleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \varepsilon - \varepsilon_\nu - T \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (3.12)$$

Diese vier linearen, partiellen Differentialgleichungen für die vier gesuchten Größen P, T, L und r werden im weiteren Text als die **Sternaufbaugleichungen** bezeichnet.

Zunächst sei nur der *vollständige Gleichgewichtsfall* betrachtet, bei dem die Zeitableitungen in den Sternaufbaugleichungen nicht auftreten. Die Lösung gestaltet sich hier am einfachsten. Dazu werden vier Randbedingungen benötigt, sowie die Dichteverteilung ρ , die nuklearen Energieproduktionsraten ε mit ε_ν , der Temperaturgradient ∇ und die chemische Zusammensetzung des Sterns. Genau hier liegen aber die eingangs erwähnten Tücken im Detail. Die Probleme sind also hinter den Symbolen gut verborgen.

Die ersten beiden Randbedingungen im Zentrum sind sehr einfach und problemlos:

$$m = 0 : \quad R(0) = 0 \quad L(0) = 0 \quad (3.13)$$

Sind Dichte, Energieproduktionsraten und Temperaturgradient im Zentrum des Sterns gegeben, so läßt sich das asymptotische Verhalten von Druck, Leuchtkraft, Temperatur und Masse am Zentrum leicht durch Integration der Sternaufbaugleichungen berechnen (Kippenhahn & Weigert 1990, S.68). Die zweiten beiden Randbedingungen befinden sich am äußeren Rand des Sterns und es läßt sich eine ebenso einfache Formulierung angeben:

$$m = M : \quad P(M) = 0 \quad T(M) = 0 \quad (3.14)$$

Allerdings ist diese Formulierung problematisch, da der Übergang von der stellaren Materie zum interstellaren Raum nicht mehr treffend durch die gegebenen Sternaufbaugleichungen beschrieben wird. Wie im Kapitel 2 schon angedeutet wurde sind die Vorgänge in der Sternatmosphäre komplex. Vier einfache Gleichungen sind dort zur physikalischen Beschreibung nicht mehr ausreichend. Insbesondere die Annahme eines diffusionsartigen Strahlungstransports durch Gleichung (3.7) stellt nur eine grobe Näherung dar. Durch Variation der äußeren Randbedingung kann sich die Lage des Sternmodells im Hertzsprung-Russell-Diagramm ändern, weshalb dieser Punkt im Abschnitt 4.3 noch genauer untersucht wird.

Die Dichteverteilung ergibt sich mit Hilfe der **Zustandsgleichung** $\rho = \rho(P, T, X_i)$ aus Druck, Temperatur und chemischer Zusammensetzung. Ist die Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander vernachlässigbar, so ist die Zustandsgleichung bekannt als *ideale Gasgleichung*. Da innerhalb des Sterns auch Strahlung auftritt muß der Strahlungsdruck noch Berücksichtigung finden. Dies kann mit Hilfe der Gleichungen (2.16) und (2.18) erfolgen. Die Teilchenzahl bleibt aufgrund von Ionisation innerhalb des Sterns nicht konstant. Zu ihrer Berechnung muß die Saha-Boltzmann-Statistik (2.29) herangezogen werden. Bei der praktischen Anwendung dieser Statistik tritt ein Problem auf, daß im Abschnitt 4.7 näher erläutert wird. Als Folge davon läßt sich die Zustandsgleichung nicht mehr eindeutig formulieren, so daß sich auch hier durch entsprechend andere Beschreibungen für einen Stern geänderte Positionen im Hertzsprung-Russell-Diagramm ergeben können.

Im Fall von sehr massearmen Sternen tritt bei hohem Druck tief im Sterninneren eine weitere *Druckkomponente* durch **entartetes Elektronengas** auf. Nachdem Elektronen einen halbzahligen Spin aufweisen, unterliegen sie dem Pauli-Prinzip. Demnach ist es nicht möglich, daß sich alle freien Elektronen im energetischen Grundzustand befinden. Vielmehr können nur jeweils zwei Elektronen eine Phasenraumzelle besetzen. Es liegen also bei niedrigen Temperaturen minimale Impulskomponenten vor, die sich als Erhöhung des Gasdrucks bemerkbar machen. Zwar spielt die Entartung des Elektronengases erst bei Sternen mit Massen $M < 0.5M_\odot$ eine merkliche Rolle, doch wurde die teilweise vorliegende Entartung bei allen Sternaufbaurechnungen berücksichtigt. Hierzu stehen seit langem ausreichend gute physikalische Beschreibungen zur Verfügung (Clayton 1983, Kippenhahn & Weigert 1990).

Die nukleare Energieproduktionsrate $\varepsilon = \varepsilon(P, T, X_i)$ ist einerseits abhängig vom Energiegewinn e_{pq} , der bei der Umwandlung von Atomkernen des Typs p in den Typ q umgesetzt wird, und andererseits von der Reaktionsrate r_{pq} , also der Häufigkeit für diese Reaktion. Damit setzt sich die Energieproduktionsrate aus der Summe aller möglichen Reaktionen zusammen:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \sum_{p,q} r_{pq} e_{pq} \quad (3.15)$$

Während der Energiegewinn mit Hilfe des *Massendefekts* leicht zu bestimmen ist, ist die Ermittlung von Reaktionsraten durchaus nicht einfach. Die benötigten Reaktionsquerschnitte können sowohl theoretisch, als auch im Labor ermittelt werden. Allerdings müssen die Laborwerte extrapoliert werden, da in Sternen andere Bedingungen herrschen. Eine weitere Schwierigkeit ist, alle wichtigen Reaktionskanäle zu erfassen. Insgesamt können die Energieproduktionsraten für den pp-Zyklus als gut bekannt bezeichnet werden. Entsprechend ergaben sich in den letzten Jahren nur geringe Änderungen. Der CNO-Zyklus ist etwas problematischer, spielt aber bei den massearmen Sternen nur eine geringe Rolle, so daß im Rahmen dieser Arbeit keine weiteren Untersuchungen zu den Energieproduktionsraten stattfanden.

Gegenüber der Energieproduktionsrate stellt der Temperaturgradient ∇ eine deutlich wichtigere Unsicherheitsquelle dar. Wie schon im letzten Kapitel erwähnt, kann der Temperaturgradient für konvektiven Energietransport nur mit Näherungsmethoden bestimmt werden, da hydrodynamische Konvektionsmodelle zu aufwendig sind. Die Auswirkungen zweier unterschiedlicher Verfahren auf die Lage der Sternaufbaumodelle im Hertzsprung-Russell-Diagramm wird im Abschnitt 4.4 untersucht. Der bei den Näherungsverfahren auftauchende Mischungswegparameter α kann zudem nicht theoretisch bestimmt werden, sondern muß an der Sonne geeicht werden (s. Abschnitt 3.5). Aber auch der radiative Temperaturgradient ∇_{rad} aus Gleichung (3.7) unterliegt einer Unsicherheit. Zur Berechnung des benötigten Massenabsorptionskoeffizienten κ_m müssen wie bei den Sternatmosphären eine Vielzahl von Opazitätsquellen berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck werden von verschiedenen Arbeitsgruppen Opazitätstabellen zur Verfügung gestellt. Diese Tabellen ermöglichen die Bestimmung der Opazität bei unterschiedlichem Druck, Temperatur, und Häufigkeiten für Wasserstoff, Helium und Metalle. Allerdings liegen die Metalle untereinander fast immer nur in solarem Mischungsverhältnis vor, obwohl Sterne auch andere Mischungsverhältnisse aufweisen. Vereinzelt existieren auch Tabellen für andere Metallzusammensetzungen. Welche Auswirkungen sich bei der Verwendung unterschiedlicher Opazitätstabellen ergeben, wird im Abschnitt 4.5.2 untersucht. Die Effekte bei Änderung der chemischen Zusammensetzung sind Gegenstand von Abschnitt 4.5. Damit werden die von Axer, Fuhrmann und Gehren (1994) geschilderten Probleme zur Altersbestimmung einer systematischen Untersuchung unterzogen.

3.2 Integrale Lösungen und das Vogt-Russell-Theorem

Mittels der existierenden Beschreibungen für Dichte, Energieproduktionsraten und Temperaturgradienten können bei gegebener chemischer Zusammensetzung jetzt Lösungen zu den Sternaufbaugleichungen berechnet werden. Dies wäre bei vollständigem Gleichgewicht besonders einfach, wenn alle vier Randbedingungen innen oder außen vorliegen würden. In diesem Fall könnte die Lösung durch einfache Integration erfolgen.

Ein altes Verfahren zur Ermittlung von Sternmodellen beruht darauf, daß im Sterninneren eine Kerntemperatur T_c und ein Kerndruck P_c erraten werden. Damit lassen sich die vier Sternaufbaugleichungen nach außen integrieren. Allerdings divergieren die Lösungen am äußeren Sternrand sehr stark, da in Gleichung (3.7) die Temperatur in der vierten Potenz auftritt. Werden für den äußeren Rand Leuchtkraft L_* und Sternradius R_* erraten und eine Intergration nach innen ausgeführt, so treten im Sterninneren Divergenzen auf, da in Gleichung (3.9) der Radius in der vierten Potenz auftritt. Um diese Problematik zu umgehen, können beide Integrationen bis etwa zur Massenhälfte des Sterns ausgeführt werden. Durch Variation der erratenen Werte kann nun ein Paar von Innen- und Außenintegrationen gefunden werden, deren Ergebnisse für Druck, Temperatur, Radius und Leuchtkraft bei der halben Sternmasse übereinstimmt. Damit passen die jeweils ausgeführten Integrationen zueinander und ein Sternmodell wurde ermittelt. Dieses Verfahren, das auch als **Modelle schießen** bekannt ist, benötigt zu seinem Nachteil jedoch eine Vielzahl von zu ratenden Modellhälften, bis eine Übereinstimmung erfolgt. Eine weitaus bessere Lösungsstrategie wird im nächsten Abschnitt aufgezeigt.

Vogt und Russell trugen etwa 1925 die ersten Erfahrungen zu ihren vollständigen Gleichgewichtslösungen zusammen. Sie stellten dabei fest, daß sie bei gegebener chemischer Zusammensetzung und Sternmasse eindeutige Lösungen erhielten. Entsprechend formulierten sie das **Vogt-Russell-Theorem: Bei gegebener Gesamtmasse und chemischer Zusammensetzung eines Sterns, existiert nur eine eindeutige Gleichgewichtskonfiguration.** Damit läßt sich die Hauptreihe als Linie von Sternen gleicher chemischer Zusammensetzung aber unterschiedlicher Sternmassen verstehen. Es gibt jedoch inzwischen auch Beispiele, die gegen eine strenge allgemeine Formulierung des Vogt-Russell-Theorems sprechen, da durchaus mehrdeutige Gleichgewichtskonfigurationen auftreten können (Lauterborn 1976, Kippenhahn & Weigert 1990, S.85 ff).

3.3 Das Henyey-Lösungsverfahren

Bis etwa 1961 war das im letzten Abschnitt erwähnte Integrationsverfahren die einzige bedeutende Lösungsmöglichkeit für die Sternaufbaugleichungen. Sehr zum Verdruß der Theoretiker, denn das Verfahren divergierte in vielen Bereichen des Hertzsprung-Russell-Diagramms. Trotz verbesserter Rechenanlagen konnten keine weiteren Erkenntnisse über massereiche Sterne, oder Entwicklungsphasen nach dem Roten-Riesen-Stadium gewonnen werden. Es wurde ein besseres Lösungsverfahren benötigt. Im August 1961 trug Henyey bei der Generalversammlung der Internationalen Astronomischen Union sein neues Verfahren vor, das bis heute fast ausschließlich verwendet wird. Ohne dieses Verfahren wären vielleicht alle moderenen Kenntnisse aus der Sternentwicklung nicht zustande gekommen.

Das Verfahren ist ein spezielles **Newton-Raphson-Verfahren** für die Problematik der Sternaufbaugleichungen. Anhand eines einfachen Beispiels wird der Algorithmus im Folgenden illustriert. Für eine Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ sei folgender Zusammenhang mit Randwert gegeben:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(0) = y_0 \qquad (3.16)$$

Die y-Werte sollen nun für die x-Werte zwischen $x = 0$ und $x = x_N$ berechnet werden.

Ebenso wie bei der praktischen Durchführung des Integrationsverfahrens wird auch hier das Problem **diskretisiert**. Das x -Intervall wird also in diskrete Intervallabschnitte x_i mit $i = 1, \dots, N$ unterteilt um eine numerische Lösung zu ermöglichen. Sei nun ein erstes Aussehen der Funktion $y(x)$ erraten und diese Anfangsnäherung als $y^0(x)$, die Nullte-Iteration, bezeichnet. Damit läßt sich sowohl der linke, als auch der rechte Teil der Differentialgleichung (3.16) numerisch berechnen. Der linke Teil entspricht einem einfachen Differenzenschema:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \equiv \left(\frac{dy}{dx} \right)_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

Der rechte Teil ermittelt sich aus der gegebenen Funktion und den entsprechenden Mittelwerten als Funktionsargumente:

$$f_{i+\frac{1}{2}} \equiv f \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \right) \quad (3.18)$$

Sowohl durch die Wahl der Mittelwerte im Funktionsargument, als auch durch Erhöhung der Stützstellenanzahl x_i können die numerischen Fehler verringert werden. Die anfangs gegebene Differentialgleichung (3.16) besteht somit nun aus N Differenzengleichungen für $i = 0, \dots, N - 1$:

$$(y_{i+1} - y_i) - f_{i+\frac{1}{2}} \cdot (x_{i+1} - x_i) = 0 \quad (3.19)$$

Mit der erratenen Ausgangsnäherung wird das Problem im Allgemeinen nicht gelöst sein, die linke Gleichungsseite ist nicht Null, da $y(x)$ sonst schon bekannt wäre. Es müssen also verbesserte Werte für $y(x)$ gefunden werden.

Zu diesem Zweck kann ein Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion $g(x)$ herangezogen werden, daß bereits Newton entwickelt hatte. Ausgehend von einer Anfangsnäherung x^0 soll der x -Wert gefunden werden, bei dem $g(x) = 0$ gilt. Wird eine Tangente an den Funktionswert $g(x^0)$ gelegt, so schneidet sie die x -Achse an der Stelle:

$$x^1 = x^0 - \frac{g(x^0)}{\left(\frac{dg}{dx} \right)_{x^0}} \quad (3.20)$$

Dieser Zusammenhang kann vom geneigten Leser mittels einer Geradengleichung an die Tangente leicht überprüft werden. Der neue x -Wert x^1 liegt näher an der Nullstelle von $g(x)$ als die Anfangsnäherung x^0 . Ein anderer Zugang besteht darin, daß der Ausgangswert x^0 um einen Wert δx^0 korrigiert werden muß, um den besseren Wert x^1 für die Nullstelle zu erhalten.

$$x^1 = x^0 + \delta x^0 \quad (3.21)$$

Dieser Korrekturwert kann durch eine lineare Entwicklung der Funktion $g(x)$ an der Stelle x^0 berechnet werden. Es gilt:

$$g(x^0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^0 \delta x^0 = 0 \quad (3.22)$$

Dabei ist der geklammerte Ausdruck an der Stelle $x = x^0$ zu berechnen. Durch Auflösung nach δx^0 und den Zusammenhang aus Gleichung (3.21) ergibt sich wieder Gleichung (3.20).

Die wiederholte Anwendung dieser Gleichung liefert immer bessere Werte zur Lösung der Problemstellung $g(x) = 0$, so daß nach einer ausreichenden Anzahl von Iterationen die erforderliche Genauigkeit erreicht werden kann.

Ist die Funktion $g = g(x_1, \dots, x_N)$ von N Variablen abhängig, so lautet die Verallgemeinerung der Gleichung (3.22):

$$g^0 + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right)^0 \delta x_j^0 = 0 \quad (3.23)$$

Damit kann aber auch das einfache Beispiel (3.16) mit seiner numerischen Repräsentation (3.19) gelöst werden. Analog zur Bedingung $g(x) = 0$ stehen nun N Gleichungen aus (3.19), wobei die Funktion $g(x)$ nun jeweils durch folgenden Ausdruck gegeben sind:

$$g_i(x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}) \equiv (y_{i+1} - y_i) - f_{i+\frac{1}{2}} \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad (3.24)$$

Die zu (3.23) analoge Bedingung zur Verbesserung der jeweiligen Ausgangswerte y_i^0 und y_{i+1}^0 lautet:

$$g_i^0 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^0 \delta y_i^0 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_{i+1}} \right)^0 \delta y_{i+1}^0 = 0 \quad (3.25)$$

Es existieren N Gleichungen dieser Form für die Intervalle $i = 0, \dots, N-1$. Nachdem alle Größen außer der Variationen δy_i^0 und δy_{i+1}^0 bekannt sind, läßt sich ausgehend von der Gleichung für $i = 0$ jeweils jede der Gleichungen nach δy_{i+1}^0 auflösen. Der Randwert y_0 ist bei dem Beispiel laut (3.16) gegeben und so lassen sich alle Korrekturwerte berechnen. Damit ist eine verbesserte Lösung für $y(x)$ gegeben und das Verfahren kann solange wiederholt werden, bis eine ausreichende Genauigkeit für die Werte von y_i erreicht ist. Auf diese Weise können die gesuchten y -Werte für das Problem (3.16) bestimmt werden.

Der formale Transfer auf die Lösung der Sternaufbaugleichungen ist eigentlich offensichtlich. Alle vier Sternaufbaugleichungen lassen sich diskretisieren und analog zu Gleichung (3.19) schreiben. An die Stelle der Stützstellen x_i und x_{i+1} treten jeweils die Massenkoordinaten m_i und m_{i+1} . Desweiteren hängt jede der vier Sternaufbaugleichungen von den physikalischen Variablen P , T , L und r ab, so daß die analoge Bedingung zu $g(x) = 0$ für jede der vier Gleichungen an der Massenkoordinate m_i folgenden Ausdruck ergibt:

$$G_j(m_i, m_{i+1}, P_i, P_{i+1}, T_i, T_{i+1}, L_i, L_{i+1}, r_i, r_{i+1}) = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N-1 \\ j = 1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (3.26)$$

Entsprechend der Gleichung (3.25) existieren nun vier Gleichungen mit den jeweiligen Variationen δP_i , δP_{i+1} , δT_i , δT_{i+1} , δL_i , δL_{i+1} , δr_i , δr_{i+1} für die Intervalle $i = 0, \dots, N-1$.

$$\begin{aligned} G_j &= \left(\frac{\partial G_j}{\partial P_i} \right) \delta P_i + \left(\frac{\partial G_j}{\partial P_{i+1}} \right) \delta P_{i+1} + \left(\frac{\partial G_j}{\partial L_i} \right) \delta L_i + \left(\frac{\partial G_j}{\partial L_{i+1}} \right) \delta L_{i+1} + \\ &+ \left(\frac{\partial G_j}{\partial T_i} \right) \delta T_i + \left(\frac{\partial G_j}{\partial T_{i+1}} \right) \delta T_{i+1} + \left(\frac{\partial G_j}{\partial r_i} \right) \delta r_i + \left(\frac{\partial G_j}{\partial r_{i+1}} \right) \delta r_{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Insgesamt stehen demnach $4N$ Gleichungen zur Verfügung, um $4(N+1)$ Variationen zu bestimmen. Zusammen mit den vier gegebenen Randwerten kann das Problem gelöst werden. Das Lösungsverfahren nach Henyey *et al.* (1964) läuft folgendermaßen ab:

1. An der Stelle $i = 0$ sind zwei äußere Randwerte explizit oder durch zwei Gleichungen gegeben. Weiter existieren vier Sternaufbaugleichungen, so daß insgesamt sechs Variationen eliminiert werden können. Demnach bleiben nur zwei Variationen ungelöst und diese seien δP_1 und δT_1 . Die sechs anderen Variationen lassen sich damit in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
\delta P_0 &= U_1 \delta P_1 + V_1 \delta T_1 + W_1 \\
\delta L_0 &= U_2 \delta P_1 + V_2 \delta T_1 + W_2 \\
\delta T_0 &= U_3 \delta P_1 + V_3 \delta T_1 + W_3 \\
\delta r_0 &= U_4 \delta P_1 + V_4 \delta T_1 + W_4 \\
\delta L_1 &= U_5 \delta P_1 + V_5 \delta T_1 + W_5 \\
\delta r_1 &= U_6 \delta P_1 + V_6 \delta T_1 + W_6
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Die 18 Koeffizienten U_j , V_j und W_j , werden aus den sechs Gleichungen explizit numerisch berechnet und gespeichert.

2. Die nun folgende Massenkoordinate $i = 1$ ist der Prototyp für alle weiteren Massenkoordinaten mit Ausnahme der innersten Koordinate bei $i = N - 1$. Wiederum stehen vier Sternaufbaugleichungen zur Verfügung und acht Variationen werden gesucht. Die Variationen δL_1 und δr_1 sind mit Gleichung (3.28) schon als Funktionen von δP_1 und δT_1 gegeben. Unter Verwendung der vier Sternaufbaugleichungen bleiben nur δP_2 und δT_2 als unbekannt übrig und die vier eliminierten Variationen sind Funktionen von δP_2 und δT_2 . Allgemein läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned}
\delta P_i &= U_{4i+3} \delta P_{i+1} + V_{4i+3} \delta T_{i+1} + W_{4i+3} \\
\delta T_i &= U_{4i+4} \delta P_{i+1} + V_{4i+4} \delta T_{i+1} + W_{4i+4} \\
\delta L_{i+1} &= U_{4i+5} \delta P_{i+1} + V_{4i+5} \delta T_{i+1} + W_{4i+5} \\
\delta r_{i+1} &= U_{4i+6} \delta P_{i+1} + V_{4i+6} \delta T_{i+1} + W_{4i+6}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Die 12 Koeffizienten werden wieder gespeichert und außerdem sind die letzten beiden Gleichungen von (3.29) als Bedingungsgleichungen für die nächste Massenkoordinate vorhanden, so daß dieses Schema bis $i = N - 2$ fortgesetzt werden kann.

3. An der innersten Massenkoordinate für $i = N - 1$ stehen wieder vier Sternaufbaugleichungen und zwei Gleichungen aus dem Henyey-Schema der letzten Massenkoordinate zur Verfügung. Außerdem gilt entweder $\delta L_N = 0$ und $\delta r_N = 0$ oder es sind zwei Bedingungsgleichungen als innere Randbedingung vorhanden, so daß nun die Variationen δP_N , δT_N , δP_{N-1} und δT_{N-1} explizit ausgerechnet werden können. Mittels der Gleichungen (3.29) und der gespeicherten Koeffizienten U , V und W lassen sich nacheinander alle Variationen bis zur äußersten Massenkoordinate berechnen.

Mit den berechneten Korrekturen kann ein verbessertes Sternaufbaumodell ermittelt werden und durch wiederholte Anwendung des Verfahrens können die Sternaufbaugleichungen bis zur erforderlichen Genauigkeit gelöst werden. Der Vorteil der erläuterten Methode liegt darin, daß gemäß Gleichung (3.27) pro Massenkoordinate 36 Koeffizienten zu speichern wären gegenüber den 12 Koeffizienten des Henyey-Schemas.

3.4 Zeitliche Entwicklung der Modelle

Die bisherigen Schilderungen ermöglichen zwar die Lösung des vollständigen Gleichgewichtsfalls in den Sternaufbaugleichungen, doch das endgültige Ziel ist die Modellierung der zeitlichen Entwicklung von Sternmodellen. Hierzu müssen sowohl die zeitabhängigen Terme in den Sternaufbaugleichungen als auch die chemische Entwicklung des Sterns betrachtet werden. Letztere wird durch die Änderung der chemischen Zusammensetzung aufgrund der Kernfusionsprozesse hervorgerufen. Die zur Energieproduktion in Gleichung (3.15) benötigten Reaktionsraten r_{pq} bestimmen demnach die chemische Entwicklung. Die zeitliche Änderung der in Gleichung (2.32) erklärten Massenbruchteile X_i setzt sich aus allen Reaktionsraten zusammen, die einerseits als Endprodukt Atomkerne vom Typ i aufweisen und andererseits von diesem Typ zu anderen Komponenten j führen:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right) \quad (3.30)$$

Wird von einem hinreichend kleinen Zeitraum Δt ausgegangen, in dem sich die Reaktionsraten nicht ändern, so lassen sich aus der Gleichung (3.30) die Änderungen der Massenbruchteile ΔX_i numerisch aus einem gegebenen Sternaufbaumodell berechnen. Damit wird das Problem der zeitlichen Entwicklung und des Sternaufbaus getrennt. Nach der numerischen Änderung der Massenbruchteile werden die Sternaufbaugleichungen erneut gelöst und die Reaktionsraten für dieses Modell bestimmt. Anschließend erfolgt der nächste **Zeitschritt**, dem wiederum ein **Sternmodell** folgt, usw.

Mit dieser Trennung zwischen zeitlicher Entwicklung und Sternmodell lassen sich auch die zeitabhängigen Terme in den Sternaufbaugleichungen behandeln. Aus der letzten Lösung des Henyey-Algorithmus ist beispielsweise die Entropie S^* an jeder Massenkoordinate gegeben. Nach Vollzug des Zeitschritts Δt kann die Zeitableitung der Entropie in den Sternaufbaugleichungen durch eine Differenz aus der Entropie des letzten Sternmodells S^* und der Entropie dieses Modells S ersetzt werden:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S - S^*}{\Delta t} \quad (3.31)$$

Sind alle Zeitableitungen durch entsprechende Ausdrücke ersetzt, ergeben sich bei der Anwendung des Henyey-Algorithmus für das Beispiel die korrekten Entropiewerte und deren zeitliche Ableitung im aktuellen Sternmodell. Werden die zeitlichen Ableitungen anschließend gespeichert, so lassen sich beim nächsten Modell auch Zeitableitungen zweiter Ordnung ermitteln.

Neben der chemischen Änderung durch Gleichung (3.30) und den Zeitableitungen der Sternaufbaugleichungen treten noch weitere zeitabhängige Prozesse auf. So führt die Konvektion zu einer Durchmischung der chemischen Zusammensetzungen am oberen und unteren Rand der Konvektionszone. Weiterhin können Diffusionsprozesse zu einer langsamen Entmischung der chemischen Elemente in den Bereichen des radiativen Energietransports führen (s. Abschnitt 4.6). Derartige Vorgänge lassen sich bei der Separation von Modellrechnung und Zeitschritt entsprechend berücksichtigen. Entscheidend bei diesem Verfahren ist eine Kontrolle aller Größen, die sich nach einem Zeitschritt verändert haben. Sind die Änderungen zu groß, so müssen kleinere Zeitschritte gewählt werden, da die Annahme einer *linearen* zeitlichen Veränderung dann keine Gültigkeit mehr besitzt. Entsprechend wurden in den Modellrechnungen dieser Arbeit oft eine übermäßig große Anzahl von Zeitschritten durchgeführt, um numerische Ungenauigkeiten auszuschließen.

3.5 Differentielle Entwicklungsrechnungen

Nachdem das grundlegende Lösungsverfahren zu den Sternaufbaugleichungen und der zeitlichen Entwicklung der Modelle in den letzten Abschnitten erklärt wurde, können nun Entwicklungswege im Hertzsprung-Russell-Diagramm erstellt werden. Zu diesem Zweck wird für den Henyey-Algorithmus ein Ausgangsmodell benötigt. Dieses Ausgangsmodell wurde bei allen Rechnungen dieser Arbeit mittels Integrationsverfahren *geschossen* (vgl. Abschnitt 3.2). Als Ausgangsgrößen müssen die Sternmasse, die Massenbruchteile von Wasserstoff, Helium und der Metalle, sowie der Mischungswegparameter für die Konvektion vorgegeben werden. Sowohl der Massenbruchteil des Heliums, als auch der Mischungswegparameter sind unbekannte Größen, die nicht durch einfache Beobachtung gemessen werden können. Allerdings lassen sich beide Größen anhand der Sonne **eichen**, wenn Masse, Radius, Leuchtkraft, chemische Zusammensetzung und Alter der heutigen Sonne bekannt sind.

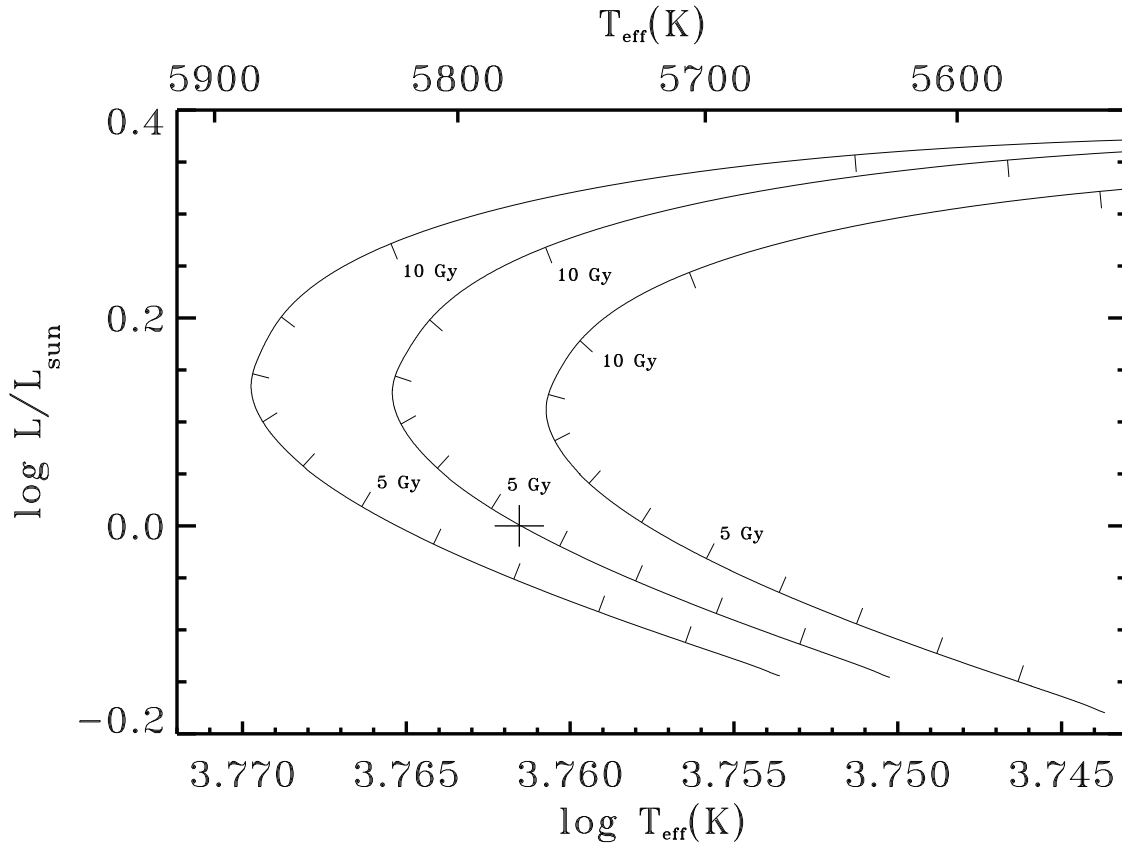


Abbildung 3.1 Entwicklungswege für die Sonne. Nur der mittlere Entwicklungsweg trifft zum Sonnenalter auch die heutige Position der Sonne im HRD, die durch das Kreuz symbolisiert ist. Wird beispielsweise der Mischungswegparameter vergrößert, so ergibt sich ein Entwicklungsweg mit höherer Effektivtemperatur, während der Entwicklungsverlauf bei einem größeren Massenbruchteil des Heliums den kühlen Entwicklungsweg ergibt. Aus der Abbildung ist erkennbar, daß die Variation des Mischungswegparameters die Altersmarken des Entwicklungswegs hauptsächlich in der Effektivtemperatur verschiebt, während die Änderung des Heliummassenbruchteils eine Verschiebung in der Diagrammdiagonalen hervorruft. Auf diesem Weg kann bei gegebener restlicher Modellphysik eine Anpassung des Sonnenmodells zur heutigen Position der Sonne im HRD erfolgen. Damit ergibt sich gleichzeitig eine Eichung des Massenbruchteils von Helium und des Mischungswegparameters.

Unter Einhaltung dieser bekannten Daten muß ein Entwicklungsweg der Sonne zum Alter der heutigen Sonne auch die heutige Position der Sonne im Hertzsprung-Russell-Diagramm wiedergeben. Dies kann durch Variation des Heliummassenbruchteils und des Mischungswegparameters erreicht werden. Das Verfahren wird in Abbildung 3.1 illustriert.

Die Eichung von Mischungswegparameter und Massenbruchteil des Heliums erfordert die Festlegung des Zeitpunkts, ab dem das Alter der Sonne gemessen wird. Allgemein wird hierzu der Zeitpunkt herangezogen, an dem die Hauptreihe erreicht wird, das sogenannte **Nullalter**. Jedoch ist die Ermittlung des Nullalters nicht völlig eindeutig. Als einfachste Annahme könnte davon ausgegangen werden, daß ein Stern mit homogener chemischer Zusammensetzung, der in seinem Inneren mit dem Fusionsprozeß beginnt, gerade die Nullalter-Hauptreihe erreicht hat. Abbildung 3.2 zeigt, daß diese Annahme falsch ist. Der chemisch homogene Stern hat noch keine *langfristige* Gleichgewichtskonfiguration erreicht. Vielmehr erzeugt das Modell zu Beginn einen beachtlichen Anteil der Energie durch Kontraktion.

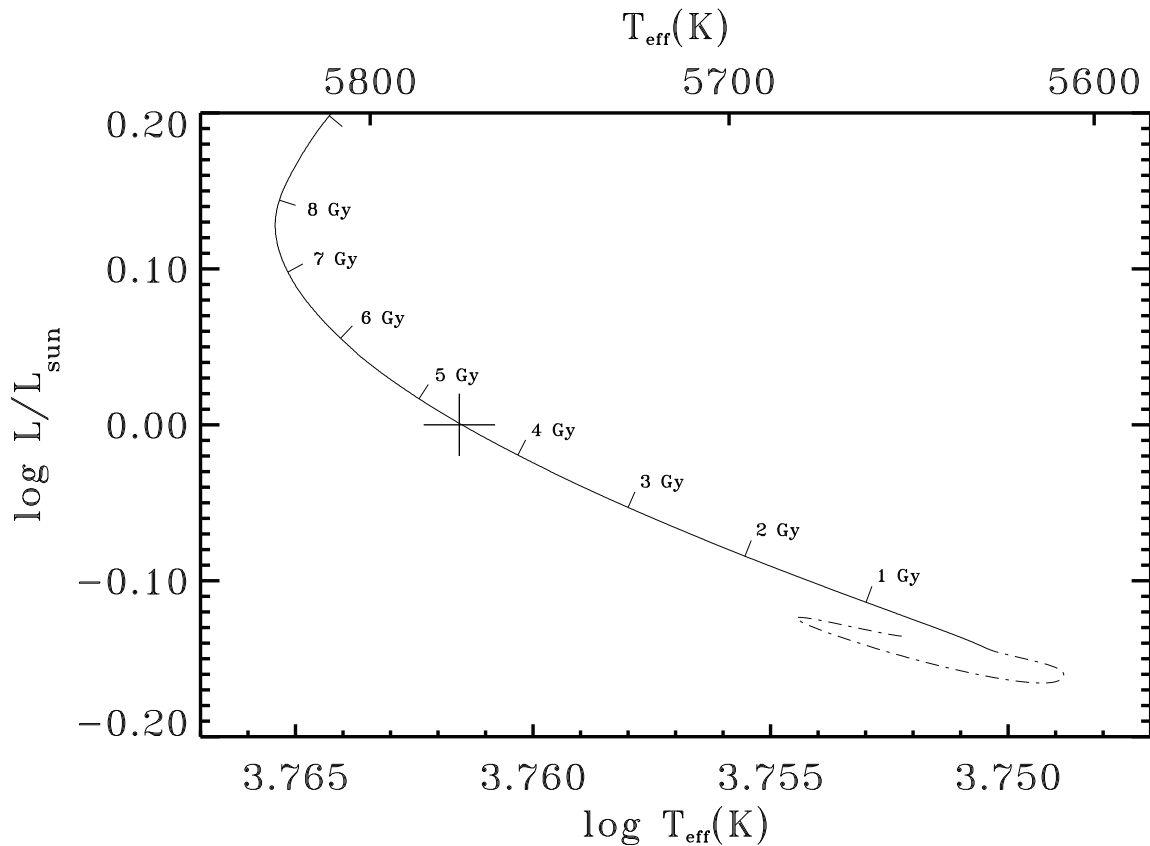


Abbildung 3.2 Entwicklungsweg der Sonne ausgehend von einer chemisch homogenen Gaskugel. Die nicht durchgezogene Linie repräsentiert die Entwicklung vom chemisch vollständig homogenen Modell bis zum Erreichen der Nullalter Hauptreihe. Für diesen Anteil des Entwicklungsweges benötigt das Modell ungefähr 80 Millionen Jahre. Im Gegensatz hierzu ist aus den Altersmarken klar erkennbar, daß im selben Zeitraum ab der Nullalter Hauptreihe wesentlich geringere Veränderungen von Leuchtkraft und Temperatur auftreten. Diese werden nur durch die nuklearen Reaktionen im Sterninneren hervorgerufen. Das Kreuz symbolisiert die Position der heutigen Sonne im HRD, wobei der doppelte Temperaturfehler und der 50-fache Fehler in der Leuchtkraft angetragen wurde (s. solare Parameter (3.32)).

Durch die noch relativ hohe Wasserstoffhäufigkeit wird im Kern mehr Energie erzeugt. Um diese effizient herauszutransportieren bildet sich ein konvektiver Kern aus, der sich schrittweise verkleinert und somit im Sterninneren einen chemischen Gradienten bezüglich der Wasserstoff- und Heliumanteile hinterläßt. Schließlich relaxiert das Modell, bis die nukleare Energiequelle vollständig dominiert. Der Stern hat jetzt die Hauptreihe erreicht. Der Übergang zwischen Gravitations- und nuklearer Energie ist fließend, wie Abbildung 3.3 zeigt. Um eine klare Definition für das Nullalter zu erhalten, muß demnach der Zeitpunkt ermittelt werden, an dem die Leuchtkraft des Wasserstoffbrennens nur mehr geringfügig durch die Änderung der Gravitationsenergie gestört wird - das Modell als relaxiert betrachtet werden kann. Bei den durchgeführten Modellrechnungen zeigte sich, daß dies erreicht wurde, wenn der Absolutbetrag der gravitativen Leuchtkraft **unter ein Tausendstel** der Gesamtleuchtkraft gesunken war. Dieses Kriterium wurde bei allen Modellrechnungen verwendet, um den Zeitpunkt des Erreichens der Nullalter-Hauptreihe zu bestimmen. Damit ist nun eine Kalibrierung des Sonnenmodells anhand der heutigen solaren Parameter und des Sonnenalters möglich.

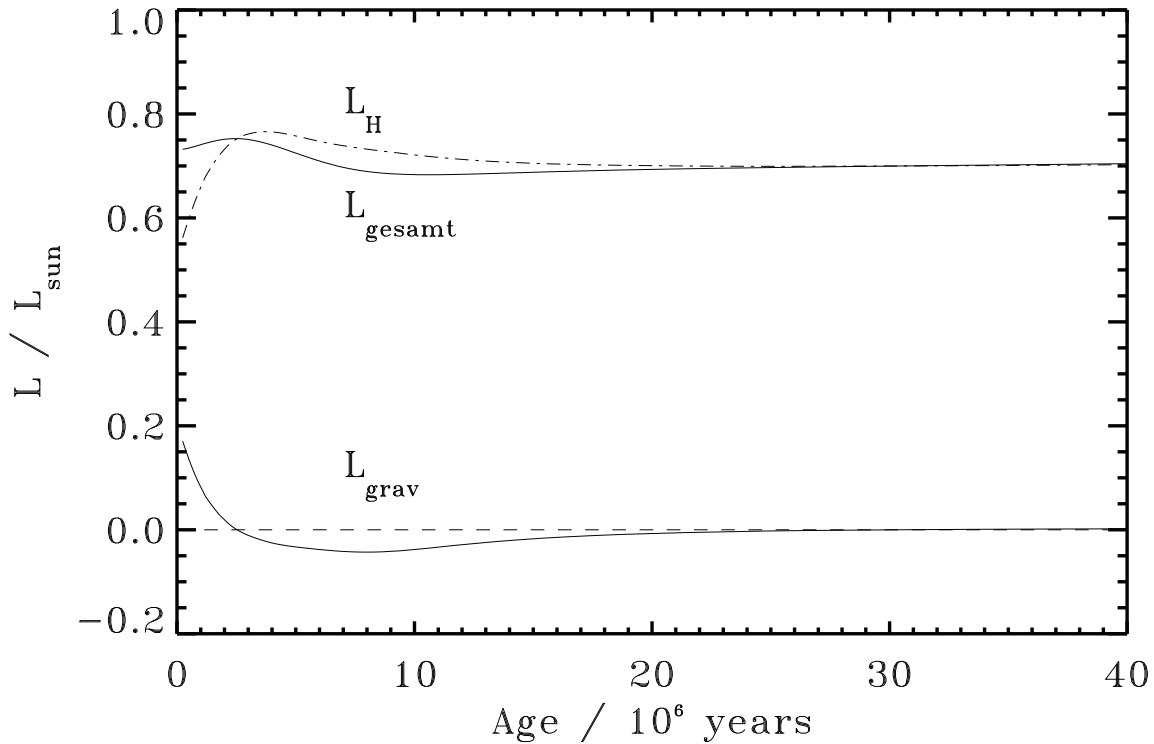


Abbildung 3.3 Entwicklung der Leuchtkraft für ein Sonnenmodell ausgehend von einer chemisch homogenen Gaskugel. Die Gesamtleuchtkraft L_{gesamt} wird zu Beginn hauptsächlich aus Gravitationsenergie L_{grav} gewonnen. Erst nach etwa 2,5 Millionen Jahren erreicht die Fusionsenergie des Wasserstoffs L_{H} die Gesamtleuchtkraft. Deutlich ist erkennbar, daß das Sternmodell eine gewisse Relaxationszeit benötigt, bis die Gesamtleuchtkraft nur noch durch das Wasserstoffbrennen hervorgerufen wird.

Die Eichung von Heliummassenbruchteil und Mischungswegparameter hat zur Folge, daß alle Entwicklungswege als differentielle Analyse zur Sonne betrachtet werden müssen. Wird davon ausgegangen, daß die physikalische Beschreibung der Sternmodelle mit Fehlern behaftet ist, so werden diese Fehler ein immer größeres Gewicht erhalten, je weiter die Eingangsparameter und das Entwicklungsstadium von den Parametern und der Entwicklung der Sonne entfernt sind. Mathematisch betrachtet wird eine Entwicklung der Sternmodelle um den **Referenzpunkt Sonne** durchgeführt. Um die Zuverlässigkeit der Sternentwicklung zu erhöhen, wären demnach weitere Referenzpunkte wünschenswert. Dieser Sachverhalt wird im Kapitel 6 noch einmal aufgegriffen. Der Ansatz einer **differentiellen Sternentwicklungsrechnung** steht in vollem Einklang mit den übrigen Analysen der stellaren Parameter in der Gruppe *Kühle Sterne*. Auch bei den stellaren Parametern dient die Sonne als Referenz, wie beispielsweise die Eichung der spektroskopischen *gf*-Werte anhand von Sonnenspektren zeigt (s. Abschnitt 2.2). Diese Philosophie begründet sich in der einfachen Tatsache, daß die Sonne der uns am besten bekannte und - speziell im Fall der Sternentwicklung - der einzige Stern ist, für den wir eine unabhängige Altersbestimmung haben. Die für diese Arbeit wichtigen zugrundegelegten Daten der heutigen Sonne werden nun im letzten Abschnitt dieses Kapitels angeführt.

3.6 Daten der heutigen Sonne

Zur Eichung der Modellrechnungen an der Sonne müssen mehrere Daten der heutigen Sonne bekannt sein. Diese sind im Einzelnen:

$$\begin{aligned}
 M_{\odot} &= 1.98892 \cdot 10^{30} kg \\
 R_{\odot} &= 6.9626 \cdot 10^8 m \\
 L_{\odot} &= (3.845 \pm 0.004) \cdot 10^{26} W \\
 T_{\text{eff}} &= 5776 K \\
 t_{\odot} &= (4.57 \pm 0.02) \cdot 10^9 yr
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Der Massenwert weist eine Unsicherheit von 0.02% auf, die unmittelbar aus dem Fehler der Gravitationskonstanten folgt. Die Angabe des Radius kann bis zur zweiten Nachkommastelle als exakt betrachtet werden. Genauere Angaben werden schwierig, da der Sonnenradius für eine optische Tiefe $\tau = 2/3$ definiert ist, die schwer meßbar ist. Der Sonnenradius wird aus Bedeckungen und Finsternissen ermittelt, wobei diese Ereignisse bei einer wesentlich geringeren optischen Tiefe gemessen werden. Die Leuchtkraft stammt aus Satellitenmessungen der Solarkonstanten. Dabei sollte erwähnt werden, daß entsprechend der Sonnenaktivität Schwankungen auftreten können. Mit Hilfe der Stefan-Boltzmann Strahlungskonstanten σ und den Gleichungen (1.5) und (1.4) ergibt sich die Effektivtemperatur der Sonne. Durch die erwähnten Schwankungen der Sonnenleuchtkraft und den Fehler im Sonnenradius läßt sich die Effektivtemperatur auf etwa 5 K genau angeben. Das Alter ergibt sich aus der Betrachtung radioaktiver Zerfallsreihen und entsprechender Messung der Isotopenhäufigkeiten in Meteoriten. Nähere Angaben zu diesen Daten befinden sich in Guenther *et al.* (1992), Bahcall *et al.* (1995) und Barnett *et al.* (1996). Schließlich werden noch die Häufigkeiten der chemischen Elemente benötigt, die in Tabelle 3.1 angeführt sind.

Tabelle 3.1 Solare Elementhäufigkeiten, die dieser Arbeit zugrundegelgt wurden. Die spektroskopischen Häufigkeiten sind von Holweger (1979), mit Ausnahme der Kohlenstoffhäufigkeit aus Stürenburg & Holweger (1990) und der Eisenhäufigkeit aus Holweger *et al.* (1995). Die Massenbruchteile wurden als Anhaltspunkt gemäß der Darstellung im Abschnitt 4.5 errechnet.

Ordnungszahl	Element	spek. Häufigkeit	Atomgewicht	Massenbruchteil
1	H	12.00	1.00794005	7.03284E-01
2	He	11.00	4.00260210	2.79279E-01
3	Li	3.28	6.94099998	9.22822E-09
4	Be	1.41	9.01218224	1.61631E-10
5	B	3.15	10.81099987	1.06552E-08
6	C	8.58	12.01099968	3.18621E-03
7	N	7.99	14.00673962	9.55065E-04
8	O	8.92	15.99940014	9.28538E-03
9	F	4.50	18.99840355	4.19192E-07
10	Ne	7.73	20.17970085	7.56155E-04
11	Na	6.28	22.98976707	3.05654E-05
12	Mg	7.53	24.30500031	5.74635E-04
13	Al	6.43	26.98153877	5.06713E-05
14	Si	7.50	28.08550072	6.19695E-04
15	P	5.35	30.97376251	4.83827E-06
16	S	7.20	32.06600189	3.54601E-04
17	Cl	5.26	35.45270157	4.50138E-06
18	Ar	6.83	39.94800186	1.88447E-04
19	K	5.05	39.09830093	3.06093E-06
20	Ca	6.36	40.07799911	6.40622E-05
21	Sc	2.99	44.95590973	3.06537E-08
22	Ti	4.88	47.88000107	2.53425E-06
23	V	3.91	50.94150162	2.88913E-07
24	Cr	5.61	51.99610138	1.47797E-05
25	Mn	5.47	54.93804932	1.13127E-05
26	Fe	7.51	55.84700012	1.26094E-03
27	Co	4.85	58.93320084	2.91109E-06
28	Ni	6.18	58.68999863	6.19812E-05
29	Cu	4.24	63.54600143	7.70520E-07
30	Zn	4.60	65.38999939	1.81638E-06
31	Ga	2.65	69.72299957	2.17306E-08
32	Ge	3.57	72.61000061	1.88231E-07
33	As	2.30	74.92159271	1.04304E-08
34	Se	3.33	78.95999908	1.17788E-07
35	Br	2.65	79.90399933	2.49037E-08
36	Kr	3.10	83.80000305	7.36105E-08
37	Rb	2.28	85.46779633	1.13631E-08
38	Sr	2.93	87.62000275	5.20354E-08
39	Y	2.18	88.90585327	9.38915E-09
40	Zr	2.46	91.22399902	1.83571E-08

Ordnungszahl	Element	spek. Häufigkeit	Atomgewicht	Massenbruchteil
41	Nb	1.46	92.90637970	1.86957E-09
42	Mo	2.10	95.94000244	8.42744E-09
44	Ru	1.78	101.06999969	4.24931E-09
45	Rh	1.10	102.90550232	9.03930E-10
46	Pd	1.62	106.41999817	3.09541E-09
47	Ag	1.17	107.86820221	1.11324E-09
48	Cd	1.69	112.41100311	3.84153E-09
49	In	0.78	114.81999969	4.82740E-10
50	Sn	2.07	118.70999908	9.73158E-09
51	Sb	0.99	121.75000000	8.30166E-10
52	Te	2.32	127.59999847	1.86014E-08
53	I	1.57	126.90447235	3.28982E-09
54	Xe	2.30	131.28999329	1.82779E-08
55	Cs	1.09	132.90542603	1.14087E-09
56	Ba	2.18	137.32699585	1.45028E-08
57	La	1.07	138.90550232	1.13871E-09
58	Ce	1.58	140.11500549	3.71690E-09
59	Pr	0.76	140.90765381	5.65758E-10
60	Nd	1.40	144.24000549	2.52802E-09
62	Sm	0.88	150.36000061	7.95845E-10
63	Eu	0.48	151.96499634	3.20213E-10
64	Gd	1.13	157.25000000	1.48008E-09
65	Tb	0.38	158.92533875	2.66004E-10
66	Dy	1.07	162.50000000	1.33213E-09
67	Ho	0.47	164.93031311	3.39622E-10
68	Er	0.86	167.25999451	8.45450E-10
69	Tm	0.05	168.93420410	1.32255E-10
70	Yb	0.80	173.03999329	7.61803E-10
71	Lu	0.05	174.96699524	1.36978E-10
72	Hf	0.73	178.49000549	6.68821E-10
73	Ta	0.20	180.94790649	2.00101E-10
74	W	0.98	183.85000610	1.22506E-09
75	Re	0.21	186.20700073	2.10713E-10
76	Os	1.34	190.19999695	2.90339E-09
77	Ir	1.36	192.22000122	3.07252E-09
78	Pt	1.65	195.08000183	6.08007E-09
79	Au	0.82	196.96653748	9.08005E-10
80	Hg	1.65	200.58999634	6.25180E-09
81	Tl	0.78	204.38330078	8.59293E-10
82	Pb	1.92	207.19999695	1.20250E-08
83	Bi	0.65	208.98037720	6.51330E-10
90	Th	0.26	232.03810120	2.94615E-10
92	U	-0.07	238.02890015	1.41359E-10

4. Detaillierte Untersuchungen

Im Abschnitt 2.3 wurde dargelegt, daß die Altersbestimmung von Sternen mit mehreren Unsicherheiten belegt ist. Wie bereits erwähnt existiert zu den Ursachen eine Vielzahl von Untersuchungen, jedoch unter Verwendung unterschiedlicher Eingangsparameter. Somit ist es aufgrund mangelnder Systematik äußerst schwierig, die Auswirkungen der unterschiedlichen physikalischen Beschreibungen auf die Entwicklungsmodelle eindeutig zu quantifizieren. In diesem Kapitel werden sowohl die bereits von Axer, Fuhrmann & Gehren (1994) angeführten Unsicherheiten als auch weitere aktuelle Änderungen der Modellphysik *systematisch* untersucht. Hierzu dient der Vergleich von Modellrechnungen mit jeder *einzelnen* Änderung gegenüber einem Referenzmodell. Dies erlaubt sowohl eine Entscheidung, welche physikalischen Effekte deutliche Auswirkungen auf die Altersbestimmung von Sternen aufweisen, als auch deren Quantifizierung. Die Ergebnisse der Untersuchungen werden schließlich im letzten Abschnitt dieses Kapitels präsentiert.

4.1 Referenzmodell

Als Referenz zu den Vergleichen der nächsten Abschnitte werden Entwicklungsrechnungen herangezogen, die dem status quo der Sternentwicklung zur Zeit der Arbeit von Axer, Fuhrmann und Gehren (1994) entsprechen. Hierbei findet die Konvektionstheorie von Böhm-Vitense gemäß der Formulierung in Cox & Giuli (1968) Verwendung (Abschnitt 4.4). Als Zustandsgleichung dient die ideale Gasgleichung unter Berücksichtigung von Ionisation mittels der Saha-Boltzmann Statistik und Entartung. Die äußere Randbedingung wird mit Hilfe des Temperatugesetzes nach Eddington (2.25) ermittelt und die Opazitäten sind OPAL-Daten von Rogers & Iglesias (1992) mit kühlen Opazitäten von Weiss, Keady & Maggee (1990) (vgl. Abschnitt 4.5.2).

Das Anfangsmodell ist eine Gaskugel homogener chemischer Zusammensetzung, die in der Nähe der Hauptreihe *geschossen* wird (vgl. 3.2). Sowohl die Eichung von Mischungswegparameter und Heliummassenbruchteil anhand der solaren Parameter (3.32) als auch die Ankunft der Sternmodelle an der Nullalter-Hauptreihe erfolgt gemäß den Betrachtungen des Abschnitts 3.5. Die zugrundegelegten spektroskopischen Häufigkeiten der Sonne entsprechen der Tabelle 3.1 und die Bestimmung der benötigten Massenbruchteile von Wasserstoff und Metallen ist analog zum Abschnitt 4.5. Damit ergeben sich aus dem Sonnenmodell folgende *Eichwerte*:

$$\begin{aligned} X &= 0.70922 \\ Y &= 0.27320 \\ Z &= 0.01758 \\ \alpha &= 1.587 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf von Druck, Temperatur, Leuchtkraft und Radius als Funktion der Massenkoordinate für das Modell der heutigen Sonne. Eine Auswahl der zu den Vergleichen errechneten Entwicklungswege ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Ausgehend von den Referenzmodellen werden in den folgenden Abschnitten jeweils einzelne Änderungen in der Modellphysik vorgenommen.

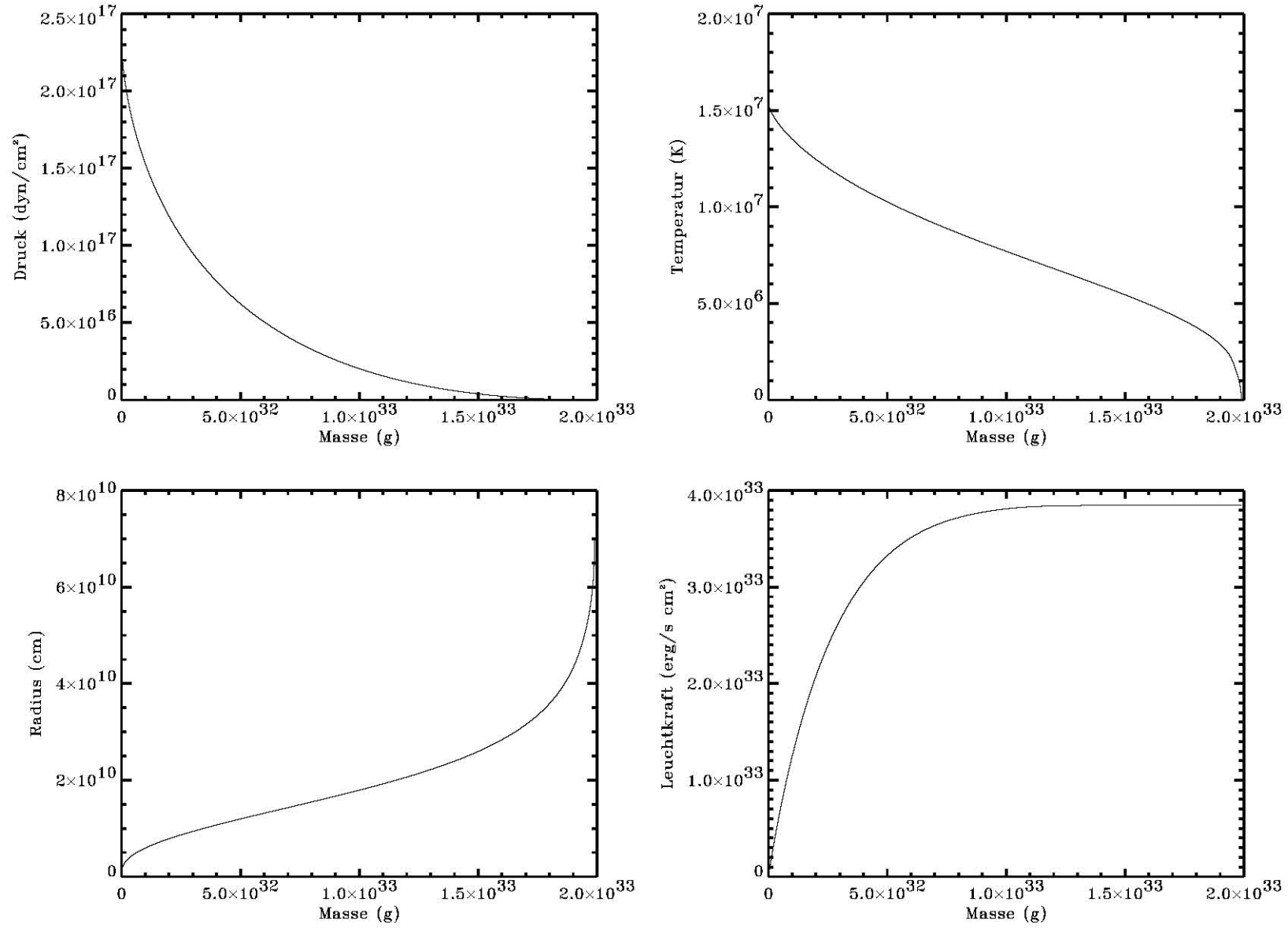


Abbildung 4.1 Verlauf von Druck, Temperatur, Radius und Leuchtkraft gegen die Massenskala für das Referenzmodell zum Zeitpunkt der heutigen Sonne ($t_0 = 4.57 \text{ Gy}$).

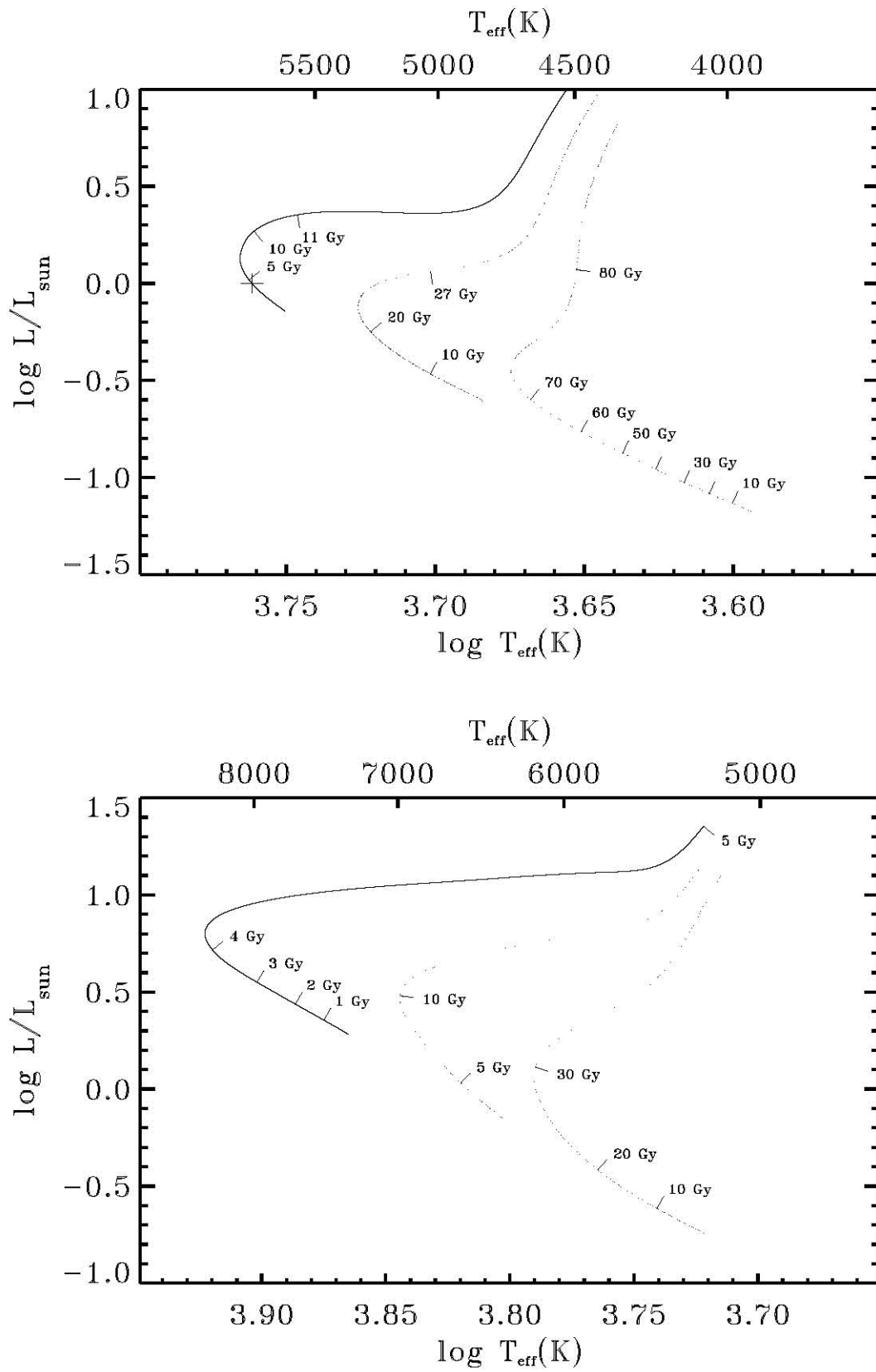


Abbildung 4.2 Entwicklungswege bei solarer chemischer Häufigkeit (oben) und $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ (unten) für jeweils von links nach rechts 1.0, 0.8, und 0.6 Sonnenmassen.

4.2 Vorhaupttreihenentwicklung

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, daß Protosterne durch ausgedehnte interstellare Gaswolken entstehen. Haben sich erste Dichtezentren in der Gaswolke gebildet, so bewegen sich weitere Gasmassen im freien Fall auf die Gravitationszentren zu. Aufgrund der sich vergrößernden Dichte in einem derartigen Zentrum steigen Temperatur und Druck an, was eine Abbremsung der einströmenden Gasmassen zur Folge hat. Von außen nachströmendes Gas bewirkt eine weitere Verdichtung, bis als Folge der Temperaturerhöhung die Gasmoleküle erst dissoziieren und später die Atome ionisiert werden. Während die ursprüngliche Gaswolke im Fall unserer Sonne eine Ausdehnung von etwa der doppelten Entfernung Sonne-Pluto besaß, liegt der Protostern, welcher sich nun im hydrostatischem Gleichgewicht befindet, deutlich innerhalb der Merkurbahn. Aufgrund der teilweisen Ionisation der Materie und Dissoziation der Moleküle entsteht ein konvektiver Energietransport.

Hayashi (1961) konnte zeigen, daß Sterne bei gegebener Leuchtkraft eine hierzu minimale Effektivtemperatur besitzen müssen, um sich in einem hydrostatischen Gleichgewicht zu befinden. Er stellte fest, daß die Sterne, die sich an der Grenzlinie zur minimalen Effektivtemperatur bei gegebener Leuchtkraft und Masse aufhalten durch *vollständig* konvektiven Energietransport gekennzeichnet sind. Außerdem ist bei kühleren Temperaturen als der Hayashi-Linie kein hydrostatisches Gleichgewicht mehr möglich. Dieser Befund kann im Zusammenhang mit der Konvektion leicht verstanden werden.

Aufgrund der fast vollständig adiabatischen Zustandsänderung der sich bewegenden Gasblasen (s. Abschnitt 4.4), ergibt sich bei Konvektion ein nahezu adiabatischer Temperaturgradient für den gesamten Stern. Bei gegebener Leuchtkraft, chemischer Zusammensetzung und Masse eines Sterns kann über den adiabatischen Temperaturgradienten eine untere Grenze für die Effektivtemperatur berechnet werden. Die Kurve geringster Effektivtemperaturen, die aus der Variation der Leuchtkraft bei fester Masse und chemischer Zusammensetzung folgt ist eine Hayashi-Linie. Dies impliziert noch einen oftmals vernachlässigten Sachverhalt: **Unterschiedliche Massen und chemische Häufigkeiten führen zu unterschiedlichen Hayashi-Linien.**

Es stellt sich die Frage, ob die sogenannte Vorhaupttreihenentwicklung, ausgehend von der entsprechenden Hayashi-Linie bis zum Erreichen der Hauptreihe, auf den weiteren Entwicklungsverlauf und speziell auf die Altersbestimmung Einfluß hat. Zu dieser Untersuchung müssen die Ausgangsmodelle auf der Hayashi-Linie geschossen werden. Die grundlegende Idee zur Erzeugung eines derartigen Modells kann bereits einer Arbeit zur Vorhaupttreihenentwicklung von Iben (1964) entnommen werden.

Da sich auf der Hayashi-Linie eine nahezu adiabatische Temperaturschichtung einstellt, folgt für jedes Sternmodell eine näherungsweise über den Radius *konstante Entropie*. Die allein aus der Kontraktion gewonnene Gravitationsenergie ergibt sich aus der Sternaufbaugleichung (3.10) für die Leuchtkraft zu:

$$E_g = T \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.2)$$

Für ein Sternaufbaumodell folgt aus der konstanten Entropie:

$$E_g = C(t) \cdot T \quad (4.3)$$

Die Konstante $C(t)$ ist nur noch vom Zeitpunkt des gewählten Modells abhängig. Wird ein Ausgangsmodell *geschossen*, so kann ein Wert für die Konstante vorgegeben werden. Dieser führt für das erste Modell einen *künstlichen* Gravitationsterm ein. Je größer die Konstante, desto höher fällt auch die Leuchtkraft des Startmodells aus. Beispielsweise resultiert bei einem Sonnenmodell eine Konstante $C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ erg K}^{-1} \text{ s}^{-1}$ in der etwa dreifachen Leuchtkraft gegenüber der heutigen Sonne. Nachdem ein Startmodell auf der Hayashi-Linie erzeugt wurde, führt die Anwendung des Henyey-Schemas zu einer zeitlichen Sequenz von Modellen, die sich entlang der Hayashi-Linie zur Hauptreihe entwickeln. Damit kann eine Vorhauptreihenentwicklung modelliert werden.

4.3 Äußere Randbedingung

Prinzipiell lassen sich die Sternaufbaugleichungen bis an den Sternrand lösen. Allerdings ist die Wahl der Randbedingung (3.14) wenig realistisch. Die Sternatmosphäre geht nach außen fließend in den Bereich von *Korona* und *Sternwind* über, die beide durchaus von Null verschiedene Werte für Druck und Temperatur besitzen. Dagegen liefern diese Bereiche nur einen vernachlässigbaren Beitrag zur Gesamtmasse des Sterns. Aus diesen Gründen wird der äußerste Bereich des Sternmodells getrennt von dem eigentlichen Sternaufbauproblem behandelt. Dabei ist an der Anschlußstelle von Sternaufbau und Sternhülle für die physikalischen Variablen auf einen *glatten*, bzw. stetig und differenzierbaren Übergang zu achten. Außerdem werden für das Henyey-Verfahren zwei Randbedingungen als Ersatz für die Gleichungen von (3.14) benötigt. Eine weit verbreitete Lösung dieser Anforderungen wird im Folgenden analog zu Kippenhahn, Weigert und Hoffmeister (1967) geschildert.

4.3.1 Diffusionsnäherung

Im Fall einer ganz exakten Anpassung der Sternhülle an den Sternaufbau werden sowohl Druck, Temperatur, Leuchtkraft und Radius am Anpassungsort als auch die Hüllenmasse benötigt. Der Temperaturverlauf entlang der *optischen Tiefe* ergibt sich mittels des Eddingtonschen Temperaturgesetzes (2.25). Bei der optischen Tiefe $\tau = 2/3$ stimmen für dieses Gesetz Effektivtemperatur und gaskinetische Temperatur überein. Der Druckverlauf kann aus der Gleichung (2.30) für das hydrostatische Gleichgewicht gewonnen werden. Hierzu wird die Höhe z der Atmosphäre durch die optische Tiefe τ ersetzt und es ergibt sich ohne Berücksichtigung des Strahlungsdrucks mit der Definition der Schwerebeschleunigung g :

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{Gm}{\kappa_m r^2} \quad (4.4)$$

Zur Berechnung des Massenabsorptionskoeffizienten $\kappa_m(\rho, T)$ werden das Eddingtonsche Temperaturgesetz (2.25) und das ideale Gasgesetz herangezogen. Nachdem in der optischen Tiefe $\tau = 0$ nur noch der Strahlungsdruck herrscht, wird es mittels Gleichung (4.4) möglich den Druckverlauf durch Integration zu ermitteln. Einerseits steht für die Sternhülle nun am Anschlußpunkt $\tau = 2/3$ der Druck als Funktion von Effektivtemperatur und Leuchtkraft $P_a(L_*, T_{\text{eff}})$ zur Verfügung und mit Hilfe des bekannten Zusammenhangs zwischen Sternradius, Leuchtkraft und Effektivtemperatur (1.5) auch der Sternradius $R_a(L_*, T_{\text{eff}})$. Andererseits ergeben sich aus der letzten Henyey-Iteration Druck P_i und Radius R_i am Anschlußpunkt aus dem Sternaufbauproblem. Die Höhe und Masse der Atmosphäre kann schließlich über die Definition der optischen Tiefe (2.9) bestimmt werden.

Allerdings erweist sich diese Berechnung als unnötig, da die Hüllenmasse M_a gegenüber der Gesamtmasse des Sterns bei den Berechnungen dieser Arbeit (für hauptreihennahe Sterne) mit $M_a/M_* \approx 10^{-10}$ vernachlässigbar ist. Anstelle der Randbedingung (3.14) tritt nun die folgende neue Randbedingung für das Henyey-Verfahren:

$$P_a(L_i, T_i) - P_i = 0 \qquad R_a(L_i, T_i) - R_i = 0 \qquad (4.5)$$

Am Anschlußpunkt werden also Druck und Radius der Hülle als Funktion von Leuchtkraft und Temperatur des Sternaufbaus berechnet. Die Werte von L_i und T_i stammen jeweils aus der letzten Henyey-Iteration und daher wird die Anschlußbedingung mit der Konvergenz des Henyey-Verfahrens erfüllt.

Das geschilderte Verfahren beruht im Wesentlichen auf dem Eddingtonschen Temperatugesetz, bei dessen Herleitung ein **isotropes** Strahlungsfeld und somit die Gültigkeit eines diffusionsartigen Strahlungstransports vorausgesetzt wurde. Andererseits wurde im Kapitel 2 darauf verwiesen, daß gerade in der Sternatmosphäre Abweichungen zur Diffusionsnäherung bestehen. Um die Gültigkeit des Verfahrens zu überprüfen muß also untersucht werden, ab welcher Tiefe der Strahlungstransport diffusionsartig erfolgt. Die entsprechenden Untersuchungen wurden von Morel *et al.* (1994) für mehrere Modellatmosphären sehr sorgfältig durchgeführt. Die Abbildung 4.3 zeigt als eines der Ergebnisse jener Arbeit die Gültigkeit der Diffusionsnäherung erst für optische Tiefen $\tau > 10$. Hieraus folgt, daß sowohl die Verwendung von detaillierten Modellatmosphären für die Sternhülle als auch die Verlegung des Anschlußpunktes zu größeren optischen Tiefen durchaus Auswirkungen auf den Sternaufbau nach sich ziehen können.

4.3.2 Anschluß von Modellatmosphären

Die Untersuchungen von Morel *et al.* (1994) legen als eine möglichst realistische äußere Randbedingung den Anschluß von Modellatmosphären bei einer hohen optischen Tiefe nahe. Die Modellatmosphären wurden für diese Arbeit mit dem Programm MAFAGS der Arbeitsgruppe *Kühle Sterne* berechnet. Das Programm beruht auf den Grundlagen von Abschnitt 2.1 und verwendet dementsprechend ODF-Tabellen von Kurucz (1995), sowie die Konvektionstheorie von Böhm-Vitense (1958). Damit kann der Anschluß an den Sternaufbau folgendermaßen bewerkstelligt werden:

Zunächst wird für den zu berechnenden Entwicklungsweg ein *Gitter* von Modellatmosphären mit entsprechender chemischer Häufigkeit erstellt. Um eine möglichst vollständige Überdeckung des Hertzsprung-Russell-Diagramms zu erreichen, werden die Atmosphären in Schritten von $\Delta T_{\text{eff}} = 100 - 200$ K und $\Delta \log g = 0.1 - 0.2$ dex berechnet. Da eine Verringerung der Schrittweiten keine weiteren Änderungen in den Entwicklungswegen ergab, kann von einem ausreichend geringen Gitterabstand ausgegangen werden. Bei jeder Modellatmosphäre sind Druck, Temperatur und Opazität als Funktion der optischen Tiefe vorhanden. Aus diesen Daten wird anschließend eine Tabelle generiert, die für jedes Gittermodell folgende Einträge enthält: Druck P_a und Temperatur T_a am Anschlußpunkt, sowie Effektivtemperatur T_{eff} , Höhe, Masse und Leuchtkraft L_* der Atmosphäre. Zur Berechnung dieser Tabelle muß die Masse des Sterns vorgegeben werden, da es sich um planparallele Modellatmosphären handelt. Über die Definition der Schwerebeschleunigung (2.34) kann der Radius R_* und mittels Gleichung (1.5) die Leuchtkraft L_* ermittelt werden. Hüllenmasse und -radius ergeben sich analog zur Behandlung der Atmosphäre mit Diffusionsnäherung.

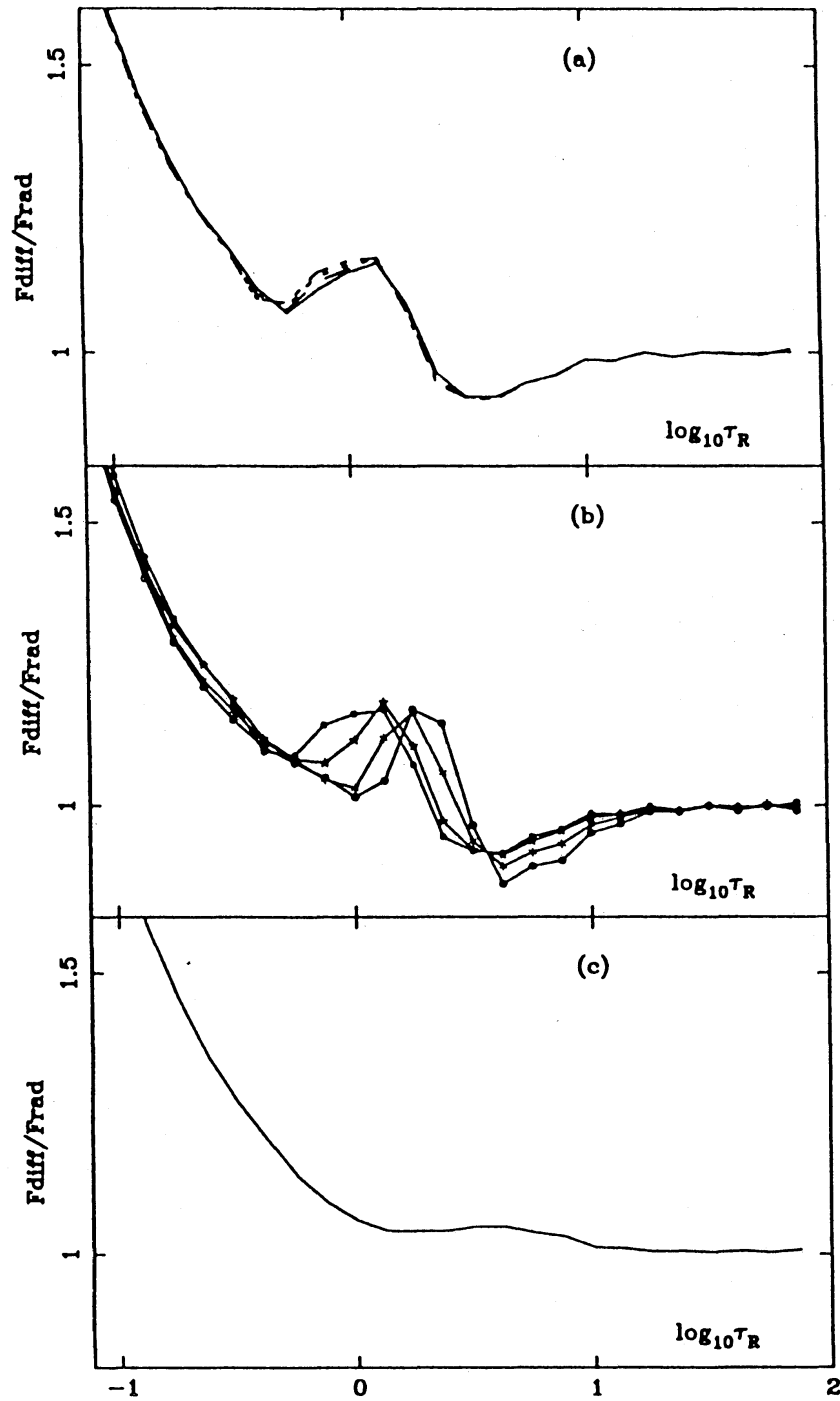


Fig. 1. a–c For the models obtained with ATLAS 9 by a complete transfer calculation, the ratio $F_{\text{diff}}/F_{\text{rad}}$ of the radiative flux derived by the diffusion approximation to its exact value is plotted with respect to the Rosseland optical depth τ_R . a $\log g = 4.47$, $T_{\text{eff}} = 5650\text{K}$ (full), 5700K (dash), 5750K (dot), 5800K (dotdash); b $T_{\text{eff}} = 5800\text{K}$, $\log g = 4.47(\bullet)$, $4.0(*)$, $3.0(\triangle)$, $2.0(\circ)$; c $T_{\text{eff}} = 10000\text{K}$, $\log g = 4.0$

Um für den Anschlußpunkt die Gültigkeit der Diffusionsnäherung zu gewährleisten, wurde dieser für alle Berechnungen bei $\tau = 20$ gewählt. Der Rest des Anschlußverfahrens kann analog zum vorhergehenden Abschnitt erfolgen. Es erweist sich in dem betrachteten Bereichen des Hertzsprung-Russell-Diagramms, daß Höhe und Masse der Hülle ebenso vernachlässigt werden können. Da innerhalb der Hülle keine Energie erzeugt wird ist die Leuchtkraft des Sterns praktisch identisch mit der Leuchtkraft am Anschlußpunkt L_a . Entsprechend können Temperatur und Leuchtkraft am Anschlußpunkt als *freie Variablen* gewählt werden und in der Tabelle wird ein Eintrag zu der Sternaufbaulösung gesucht, bei der die Bedingungen $L_a = L_i$ und $T_a = T_i$ erfüllt sind. Ist kein exakter Tabelleneintrag vorhanden, so wird mit einer zweidimensionalen Taylor-Reihenentwicklung zwischen den Tabellenwerten interpoliert. Damit ergeben sich aus der Tabelle R_a und P_a , die im Verlauf der Henyey Iterationen erneut die Bedingung (4.5) erfüllen müssen.

Bei den ersten Überlegungen und Anschlußversuchen tauchte jedoch ein unerwartetes Problem auf. Im Abschnitt 2.2 wurde schon erwähnt, daß Fuhrmann (1993) den Parameter der Mischungsweglänge zur konsistenten Temperaturbestimmung mittels der Balmerlinien auf $\alpha = 0.5$ eichen mußte. Andererseits benötigen Modelle des Sternaufbaus bei identischer Formulierung der Konvektionstheorie Werte von $\alpha \approx 1.6$ um den Entwicklungsweg zur heutigen Sonne zu repräsentieren (s. Abschnitt 4.1). Da der Anschlußpunkt $\tau = 20$ zwischen Modellatmosphäre und Sternaufbau schon weit innerhalb der Konvektionszone von massearmen Sternen liegt, müssen bei einem glatten Übergang beider Bereiche die Mischungswegparameter aber identisch sein. Entweder ist somit der Befund von Fuhrmann (1993) oder die Eichung an der heutigen Sonne ungültig. Oder aber es bleibt noch der Versuch, sowohl die beiden Eichungen, als auch eine konsistenten Formulierung der Konvektion durch Veränderungen an der Konvektionstheorie zu beseitigen. Zu diesem Zweck muß die parametrische Formulierung der Konvektion als nächstes genauer dargestellt werden.

4.4 Konvektion

Wie im Abschnitt 2.1.1.2 bereits erwähnt, tritt Konvektion auf, sobald sich Gaselemente aufgrund von Auftriebs- oder Abtriebskräften über größere Strecken bewegen. Dieser Zusammenhang erlaubt ein formales Kriterium für das Auftreten von Konvektion. Als *konvektives Element* wird eine Gasblase angenommen, die sich am Ort r aus ihrer Ruhelage durch eine geringe Störung um Δr entfernt hat. Die Gasblase entfernt sich von ihrem Ausgangsort weiter, falls eine resultierende **Auftriebskraft** K vorhanden ist. Diese Kraft hängt bekanntlich vom Elementvolumen V , der lokalen Schwerebeschleunigung g , sowie den Dichten von Element ρ_e und Umgebung ρ_u ab:

$$K = \left(\frac{d\rho_e}{dr} - \frac{d\rho_u}{dr} \right) \cdot g \cdot V \cdot \Delta r \quad (4.6)$$

Konvektion tritt für eine positive Kraft auf, entsprechend muß der geklammerte Ausdruck in Gleichung (4.6) positiv sein. Die Dichte $\rho(P, T, \mu)$ ist über die Zustandsgleichung abhängig von Druck P , Temperatur T und dem mittleren Molekulargewicht μ . Änderungen im mittleren Molekulargewicht sollen hier *ausschließlich* durch die chemische Zusammensetzung bedingt sein. Ionisationsprozesse werden demnach beispielsweise durch die Variation von Druck und Temperatur berücksichtigt.

Weiterhin kann von Adiabatie und konstanter chemischer Zusammensetzung für eine Gasblase ausgegangen werden. Somit ergibt sich als Konvektionsbedingung:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{dT}{dr}\right)_u + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dr}\right)_u - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{dT}{dr}\right)_e > 0 \quad (4.7)$$

Wird nun Gleichung (4.7) mit der **Druckskalenhöhe**

$$H_p := -P \frac{dr}{dP} \quad (4.8)$$

multipliziert, so ergibt sich unter Verwendung der Definitionen

$$\rho_\mu := \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \quad \rho_T := \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \quad (4.9)$$

zusammen mit der Definition (3.4) als Konvektionskriterium:

$$\rho_T \nabla_u + \rho_\mu \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P}\right)_u < \rho_T \nabla_e \quad (4.10)$$

Schließlich wird angenommen, daß im Extremfall in der Umgebung nur ein radiativer Strahlungstransport nach Gleichung (3.7) erfolgt, während sich das Gaselement adiabatisch verhält. Damit lautet das sogenannte **Ledoux-Kriterium** für das Auftreten von Konvektion unter Beachtung von $\rho_T < 0$:

$$\nabla_{rad} + \frac{\rho_\mu}{\rho_T} \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P}\right)_u > \nabla_{ad} \quad (4.11)$$

Wird von einer Änderung der chemischen Zusammensetzung in der Umgebung abgesehen, so tritt das wesentlich einfachere **Schwarzschild - Kriterium** ein:

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad} \quad (4.12)$$

Zum Erreichen dieser Bedingung kann einerseits ∇_{rad} erhöht werden. In 2.1.1.2 wurde schon gezeigt, daß dies durch Anstieg der Opazität verursacht wird. Andererseits kann auch ∇_{ad} gesenkt werden. Dies erfolgt durch Dissoziation von Molekülen, sowie durch Ionisation der Gasatome. Dieser Mechanismus ist auch für die Wasserstoffkonvektionszone in der Sonne verantwortlich. Wird der Druck in einem adiabatischem Gasvolumen erhöht und findet gleichzeitig Dissoziation oder Ionisation statt, so muß ein Teil der Volumenarbeit für diese Teilchenzahlerhöhung aufgewendet werden. Dementsprechend erfolgt nun ein geringerer Anstieg der Temperatur als im Fall ohne Teilchenzahlerhöhung. Der adiabatische Temperaturgradient wird also flacher. Allgemein setzt sich im Fall von Konvektion der gesamte Energiestrom aus einem konvektiven Anteil Φ_k und einem radiativen Anteil Φ_r zusammen. Mittels der Gleichungen (1.4), (1.5), (3.7) und dem hydrostatischen Teil von (3.1) läßt sich dieses Gleichgewicht folgendermaßen schreiben:

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \Phi_k + \frac{16\sigma T^4}{3\kappa H_p} \nabla \quad (4.13)$$

Der Gesamtenergiestrom kann mit Hilfe der Gleichungen (3.7), (4.8) und dem hydrostatischen Teil der Gleichung (3.1) ebenfalls umgeschrieben werden:

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{16\sigma T^4}{3\kappa H_p} \nabla_{rad} \quad (4.14)$$

Hierbei ist ∇_{rad} der Temperaturgradient, der sich einstellt, wenn der **gesamte** Energiestrom durch Strahlungstransport erfolgt. Damit ergibt sich für den konvektiven Energiestrom:

$$\Phi_k = \frac{16\sigma T^4}{3\kappa H_p} (\nabla_{rad} - \nabla) \quad (4.15)$$

Eine möglichst einfache und zutreffende Bestimmung des Temperaturgradienten $\nabla \equiv \nabla_u$ ist wesentlich für die Lösung der Sternaufbaugleichungen. Der Temperaturgradient ∇ , der sich unter Konvektion einstellt, läßt sich aufgrund des Gleichgewichts (4.15) berechnen, sobald der rein konvektive Energiestrom Φ_k bekannt ist. Nachdem hydrodynamische Simulationen zu zeitaufwendig sind, muß auf parametrische Beschreibungen der Konvektion zurückgegriffen werden. Die bekannteste Vertreterin ist die *Mischungswegtheorie*. Sie geht im Wesentlichen auf Prandtl zurück und nimmt an, daß sich die aufsteigenden oder absinkenden Gasblasen nach einem Mischungsweg Λ schlagartig auflösen. Zunächst wird die am weitesten verbreitete Formulierung von Böhm-Vitense (1958) vorgestellt (s. auch Vitense 1953), gefolgt von einem Ansatz nach Canuto & Mazzitelli (1992).

4.4.1 Die Formulierung nach Böhm-Vitense

Als Konvektionselemente hat Böhm-Vitense Gasblasen einer festen Größe und Geometrie angenommen. Mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstanten Druck c_p und der **mittleren Geschwindigkeit** v der Gasblase, sowie dem **mittleren Temperaturexzess** ΔT zwischen Umgebung und Gasblase nach Erreichen der Mischungsweglänge, ergibt sich für den konvektiven Energiestrom:

$$\Phi_k = c_p \rho v \Delta T \quad (4.16)$$

Der mittlere Temperaturexzess kann mittels der Temperaturgradienten von Gasblase und Umgebung berechnet werden:

$$\Delta T = \int_0^\Lambda \left(\frac{dT_e}{dr} - \frac{dT_u}{dr} \right) dr \approx \left(\frac{dT_e}{dr} - \frac{dT_u}{dr} \right) \cdot \frac{\Lambda}{2} \quad (4.17)$$

Über die Definition der Druckskalenhöhe (4.8) kann der mittlere Temperaturexzess auch als Funktion der logarithmischen Temperaturgradienten bezüglich des Drucks für die Umgebung ∇ und für die Gasblase ∇_e angegeben werden. Die Rechnung erfolgt analog zur Umformung der Gleichung (4.7) und ergibt:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx (\nabla - \nabla_e) \cdot \frac{\Lambda}{2H_p} \quad (4.18)$$

Daraus erhält man für den konvektiven Energiestrom die Beziehung:

$$\Phi_k = c_p \rho v \cdot \frac{T\Lambda}{2H_p} \cdot (\nabla - \nabla_e) \quad (4.19)$$

Die mittlere Geschwindigkeit der Konvektionselemente kann aus dem Energieerhaltungssatz über die Auftriebskraft K bestimmt werden.

$$\frac{m}{2}v^2 = \int_0^\Lambda K(r) dr \quad (4.20)$$

Erneut unter Heranziehung der Druckskalenhöhe ist eine Darstellung der Auftriebskraft als Funktion der Druckgradienten ∇ und ∇_e möglich. Hierbei berücksichtigte Böhm-Vitense in ihrer späteren Publikation (1958) noch zusätzlich die Turbulenzreibung mit einem Faktor, sowie die Abhängigkeit der Dichte von dem mittleren Molekulargewicht durch einen Korrekturfaktor Q :

$$Q := \left(\frac{\partial \log \rho}{\partial \log T} \right)_P \quad (4.21)$$

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich danach mit dem Parameter f_0 zu:

$$v^2 = \frac{gQ\Lambda^2}{f_0 H_P} (\nabla - \nabla_e) \quad (4.22)$$

Je nach Berücksichtigung der Turbulenzreibung kann f_0 verschiedene Werte aufweisen und ist nicht ganz eindeutig festgelegt. In den meisten Arbeiten findet $f_0 = 8$ Verwendung. Als Problemstellung bleibt nun die Berechnung des Temperaturgradienten für das konvektive Element.

Dieser Temperaturgradient läßt sich mit Hilfe der **konvektiven Effizienz** Γ , dem Verhältnis von überschüssigem Energiegehalt einer Gasblase zu deren abgestrahlter Energie während der Lebensdauer, bestimmen. Allgemein wird der Temperaturgradient des konvektiven Elements die Beziehung $\nabla < \nabla_e < \nabla_{ad}$ erfüllen. Ist der Temperaturgradient der Gasblase gerade der adiabatische Temperaturgradient, so erfolgt definitionsgemäß keine Abstrahlung. Die abgestrahlte Energie ist also proportional zur Differenz $\nabla_{ad} - \nabla_e$. Entspricht andererseits der Temperaturgradient der Gasblase gleich dem Temperaturgradienten der Umgebung, so besitzt die Gasblase keinen überschüssigen Energiegehalt mehr. Demnach ist letzterer proportional zu $\nabla_e - \nabla$. Damit folgt für die konvektive Effizienz:

$$\Gamma = \frac{\nabla - \nabla_e}{\nabla_e - \nabla_{ad}} \quad (4.23)$$

Gleichzeitig kann das Verhältnis für die konvektive Effizienz aber auch direkt ermittelt werden. Die überschüssige Energie einer Gasblase des Volumens V berechnet sich mit dem maximalen Temperaturüberschuß $\Delta T_{\max}$ zwischen Gasblase und Umgebung nach

$$\Delta E = c_p \rho V \Delta T_{\max}. \quad (4.24)$$

Die über eine Oberfläche O abgestrahlte Leuchtkraft kann mit Hilfe des **mittleren Temperaturexzesses** ΔT zwischen Gasblase und Umgebung bestimmt werden:

$$\Delta L_{\text{ab}} = \sigma \Delta(T^4) \cdot O = 4\sigma T^3 \Delta T \quad (4.25)$$

Nachdem ein konvektives Element den Weg Λ zurücklegt, bis es sich auflöst, beträgt die Lebensdauer einer Gasblase Λ/v . Schließlich muß noch das Abstrahlungsverhalten für das konvektive Element berücksichtigt werden. Hierbei wird eine Abstrahlung erschwert, wenn die Gasblase, die etwa von der Größe Λ ist, eine große optische Tiefe $\kappa\Lambda$ besitzt. Somit teilt sich die abgestrahlte Energie in einen Fall für eine optisch dünne und im zweiten Fall für eine optisch dichte Gasblase auf:

$$E_{\text{ab}} = 4\sigma T^3 \Delta T \cdot O \cdot \frac{\Lambda}{v} \cdot \begin{cases} \kappa\Lambda & : \kappa\Lambda \ll 1 \\ \frac{1}{\kappa\Lambda} & : \kappa\Lambda \gg 1 \end{cases} \quad (4.26)$$

Mit der Division von Gleichung (4.24) durch (4.26) ergeben sich durch die Geometrie der Gasblase, durch das Verhältnis von maximalen zu mittlerem Temperaturexzess und durch den Übergang zwischen optisch dünnen zu optisch dichten Gasblasen gewisse Freiheiten. Mit der Definition eines **Geometrieparameters** y

$$y := \frac{\Delta T_{\text{max}} \cdot V}{\Delta T \cdot O \cdot \Lambda} \quad (4.27)$$

und der Einführung eines **optischen Dichteparameters** z , der Variationen im Abstrahlungsverhalten der Gasblase erlaubt, läßt sich die konvektive Effizienz schließlich folgendermaßen darstellen:

$$\Gamma = \frac{c_p \rho v}{8\sigma T^3} \cdot y \cdot \left(\frac{1}{\kappa\Lambda} + z \cdot \kappa\Lambda \right) \quad (4.28)$$

Damit ist nun eine Möglichkeit zur Bestimmung des konvektiven Energiestroms Φ_k gegeben, zu deren einfacheren Herleitung folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$A \equiv \frac{c_p \rho \Lambda}{8\sigma T^3} \sqrt{\frac{gQ}{f_0 H_p}} \quad (4.29)$$

$$G \equiv y \cdot \left(\frac{1}{\kappa\Lambda} + z \cdot \kappa\Lambda \right) \quad (4.30)$$

$$\omega \equiv \sqrt{\nabla - \nabla_e} \quad (4.31)$$

$$\beta \equiv \nabla - \nabla_{ad} \quad (4.32)$$

Wird in Gleichung (4.28) die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit aus (4.22) eingesetzt, so ergibt sich für die konvektive Effizienz unter Verwendung obiger Identitäten:

$$\Gamma = A \cdot G \cdot \omega \quad (4.33)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (4.15) und (4.19) folgt wiederum unter Verwendung der mittleren Konvektionsgeschwindigkeit und der gegebenen Identitäten:

$$A \cdot \frac{3}{4} \kappa \Lambda \omega^3 = (\nabla_r - \nabla_{ad}) - \beta \quad (4.34)$$

Die Definition der konvektiven Effizienz (4.23) kann ebenfalls durch die Identitäten ausgedrückt werden:

$$\Gamma = \frac{\omega^2}{\beta - \omega^2} \quad (4.35)$$

Gleichsetzen von (4.33) und (4.35) liefert:

$$\beta = \omega^2 + \frac{\omega}{AG} \quad (4.36)$$

Diese Beziehung kann in Gleichung (4.34) eingesetzt werden und es ergibt sich schließlich eine kubische Gleichung in ω :

$$\frac{3}{4} \kappa \Lambda A^3 G^2 \omega^3 + A^2 G^2 \omega^2 + AG\omega - A^2 G^2 (\nabla_{rad} - \nabla_{ad}) = 0 \quad (4.37)$$

Auf numerischem Weg kann diese Gleichung gelöst werden. Wird in die Gleichung (4.19) erneut die mittlere Konvektionsgeschwindigkeit (4.22) eingesetzt, so ist mit dem Ergebnis der kubischen Gleichung auch der konvektive Energiestrom bekannt:

$$\Phi_k = \frac{c_p \rho T \Lambda^2}{2H_p} \sqrt{\frac{gQ}{f_0 H_p}} \cdot \omega^3 \quad (4.38)$$

Der Mischungswegparameter α nach Gleichung (2.26) wird nun anstelle der geometrischen Ausdehnung der Gasblase Λ eingeführt. Mit der Festlegung der Werte für die Parameter y , z , f_0 und α ergibt sich eine entsprechende Formulierung der Konvektion. **Es ist klar, daß die oftmals in der Literatur anzutreffende alleinige Angabe des Mischungswegparameters α , für Vergleiche nicht ausreichend ist.** Dies gilt ebenfalls für die Floskel, daß die Konvektionstheorie nach Böhm-Vitense verwendet wurde, da Böhm-Vitense in ihren beiden Veröffentlichungen unterschiedliche Werte für die Parameter gewählt hat. Die manchmal anzutreffende Angabe, daß die Parameterwahl gemäß Cox & Giuli (1968) erfolgte, ist dagegen eindeutig. In diesem Fall gilt

$$f_0 = 8 \quad G = \frac{1}{3} \kappa \Lambda \quad (4.39)$$

und die kubische Mischungsweggleichung (4.37) erhält die einfache Form:

$$\frac{9}{4} \Gamma^3 + \Gamma^2 + \Gamma - (AG)^2 (\nabla_{rad} - \nabla_{ad}) = 0 \quad (4.40)$$

Im Ergebnisteil 4.8.3 wird gezeigt, daß die Beschreibung nach Böhm-Vitense trotz ihrer freien Parameter die Diskrepanz zwischen atmosphärisch geforderter Konvektion und den Erfordernissen des Sternaufbaus nicht beseitigen kann. Aus diesem Grund wird nun eine weitere Formulierung vorgestellt.

4.4.2 Konvektion nach Canuto und Mazzitelli

Beobachtet man den konvektiven Energietransport etwa in einem Topf mit Flüssigkeit auf einem Herd, so ist jedem Betrachter sofort klar, daß die von Böhm-Vitense getroffene Annahme, die Gasblasen besitzen eine feste Größe, eine sehr grobe Näherung darstellt. Vielmehr wird der Energietransport durch ein Spektrum von turbulenten Gasblasen verschiedener Größe bewerkstelligt. Die turbulente kinetische Energie *pro Masse* setzt sich demnach für eine mittlere Konvektionsgeschwindigkeit v_t aus einem Energiespektrum $E(k)$ zusammen:

$$\frac{1}{2} v_t = \int_0^\infty E(k) dk \quad (4.41)$$

Hierbei kann der Integrationsparameter k von der Mischungsweglänge Λ über die Relation

$$k = \frac{\pi}{\Lambda} \quad (4.42)$$

dargestellt werden. Somit ist die Gleichung (4.41) zu einer Integration über ein Spektrum von verschieden großen Gasblasen äquivalent. Gelingt es, das Energiespektrum $E(k)$ zu berechnen, so kann der konvektive Energiestrom Φ_k für ein Spektrum mit verschieden großen Gasblasen ermittelt werden.

Diese Problemstellung wurde von Canuto & Mazzitelli (1992) in ihrer Publikation teilweise auf analytischem Weg und andererseits auch mit numerischen Verfahren gelöst. Im Folgenden werden nur die wichtigsten Ergebnisse ihrer Arbeit angeführt, da die Herleitung sehr komplex und umfangreich ist. Außerdem ergeben sich keine weiteren Einblicke zu den Untersuchungen in dieser Arbeit. Die Autoren modellierten sowohl den Energietransport für ein Blasenspektrum, als auch für nur eine feste Blasengröße. Im ersten Fall erhielten sie für das Energiespektrum ein Kolmogorov Spektrum:

$$E(k) \sim k^{-\frac{5}{3}} \quad (4.43)$$

Während im zweiten Fall für die Konvektion gemäß der Mischungswegtheorie nach Böhm-Vitense eine bestimmte Blasengröße mit Hilfe zweier Konstanten E_0 und k_0 und einer Dirac Deltafunktion festgelegt wurde:

$$E(k) = E_0 \delta \left(1 - \frac{k}{k_0} \right) \quad (4.44)$$

Aus dem Vergleich beider Fälle konnte festgestellt werden, daß die Mischungswegtheorie eine gute Beschreibung für viskose Medien darstellt, nicht jedoch für fast unviskoses Gas, wie etwa im Sterninneren. Des weiteren ergab sich bei der Berücksichtigung des Blasenspektrums ein größerer konvektiver Energiestrom als bei der Mischungswegtheorie. Die numerischen Ergebnisse der Berechnungen wurden von Canuto & Mazzitelli parameterisiert, so daß eine bequeme Implementierung in Sternaufbau- oder Modellatmosphärenprogramme möglich ist. Anstelle der kubischen Mischungsweggleichung (4.40) von Böhm-Vitense erhielten sie folgende Modifikation:

$$\frac{9}{4} \Omega(\Gamma) \Gamma^3 + \Gamma^2 - (AG)^2 (\nabla_{rad} - \nabla_{ad}) = 0 \quad (4.45)$$

Dabei berechnet sich die Funktion $\Omega(\Gamma)$ aus dem Verhältnis des konvektiven Energiestroms Φ unter Berücksichtigung des Blasenspektrums, zu dem konvektiven Energiestrom Φ_{MLT} im Fall der Mischungswegtheorie:

$$\Omega(\Gamma) = \frac{\Phi}{\Phi_{\text{MLT}}} \quad (4.46)$$

In beiden Ausdrücken für den konvektiven Energiestrom lassen sich die identischen Größen kürzen, so daß sich zwei einfachere Funktionen Ψ und Ψ_{MLT} ergeben. Beide Funktionen hängen im Wesentlichen nur von einer Funktion Σ der konvektiven Effizienz ab:

$$\Sigma = 4 \Gamma (\Gamma + 1) \quad (4.47)$$

Die numerischen Ergebnisse von Canuto & Mazzitelli sowie deren Parameterisierung sind in Abbildung 4.4 dargestellt.

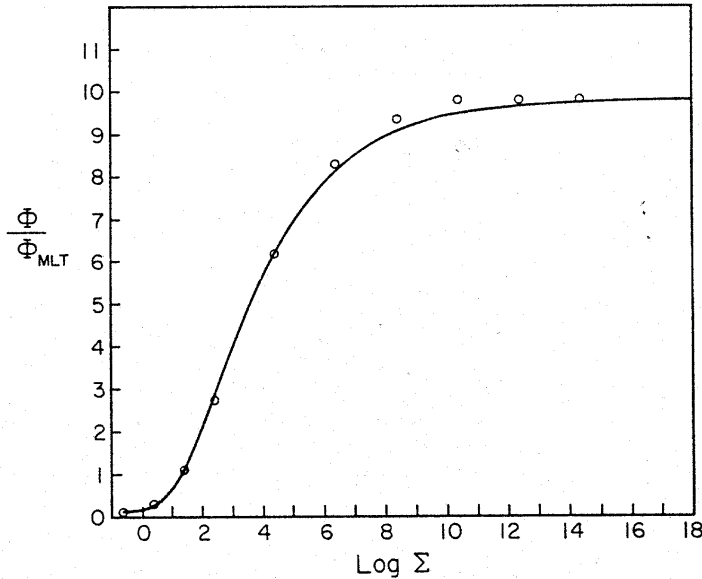


Abbildung 4.4 Verhältnis der konvektiven Energieströme als Funktion von $\log \Sigma$. Die Kreise stellen die Ergebnisse aus den numerischen Berechnungen dar, die anschließend mit der Funktion in Gleichung (4.48) parameterisiert wurden. Entnommen aus Canuto & Mazzitelli (1992).

Aus der Parameterisierung ergibt sich für das vollständige Blasenspektrum

$$\Psi = 24.868 \Sigma^{0.14972} [(1 + 9.7666 \cdot 10^{-2} \Sigma)^{0.18931} - 1]^{1.8503} \quad (4.48)$$

während man im Fall der Mischungsweglängentheorie folgenden Ausdruck erhält:

$$\Psi_{\text{MLT}} = \frac{9}{8} \Sigma^{-1} \left[\sqrt{1 + \Sigma} - 1 \right]^3 \quad (4.49)$$

Zusammen mit der zur Gleichung (4.46) analogen Formulierung

$$\Omega(\Gamma) = \frac{\Psi}{\Psi_{\text{MLT}}} \quad (4.50)$$

ist die Gleichung (4.45) nun eine reine Funktion der konvektiven Effizienz Γ und kann entsprechend numerisch gelöst werden. Damit ist mit den Gleichungen (4.29)-(4.32), (4.33) und (4.38) die Berechnung des konvektiven Energiestroms unter Berücksichtigung eines Blasenspektrums während der Modellrechnungen von Sternaufbau und Sternatmosphären möglich.

Wie im Ergebnisteil zu sehen sein wird, konnte mit Hilfe des Konvektionsmodells von Canuto & Mazzitelli eine Eichung der heutigen Sonne unter Erfüllung der spektroskopischen Anforderungen gemäß der Arbeit von Fuhrmann (1993) erfolgen. Abschließend sei noch erwähnt, daß zur Überwindung des Problems der verschiedenen Mischungswegparameter für Sternaufbau und Sternatmosphäre neben der Untersuchung von Konvektionstheorien auch die Möglichkeit zur tiefenabhängigen Variation des Mischungswegparameters in einem Übergangsbereich von Sternaufbau und Sternatmosphäre besteht (vgl. Schlattl *et al.*, 1997). Daraus ergibt sich jedoch eine gewisse Willkür für den Übergangsbereich.

4.5 Elementhäufigkeiten und Opazitäten

Nach den bisherigen Abschnitten ist zu erwarten, daß die Wahl von Elementhäufigkeiten und Opazitäten große Auswirkungen auf die Sternaufbaumodelle haben wird. Die Opazitäten beeinflussen sowohl den radiativen, als auch den konvektiven Energietransport und werden ihrerseits durch atomphysikalische Prozesse und chemische Häufigkeiten vorgegeben. Die entsprechende Berücksichtigung individueller chemischer Häufigkeiten bei den Modellrechnungen stellt kein Problem dar. Dagegen ist die Berechnung von Opazitäten, wie im Kapitel 2 schon angedeutet, sehr zeitaufwendig und erfordert große Datenmengen. Es ist daher üblich, die Opazitäten für bestimmte chemische Zusammensetzungen als Funktionen von Dichte und Temperatur zu tabellieren. Aufgrund der geringen Anzahl von verfügbaren Tabellen sind exakte Modellrechnungen für einen Stern mit bestimmter chemischer Zusammensetzung eigentlich nur in Ausnahmefällen möglich. Jedoch kann mit Hilfe der vorhandenen Tabellen der Einfluß einer ungenauen Repräsentation von chemischen Häufigkeiten in den Tabellen untersucht werden. Zu diesem Zweck werden zunächst die Grundlagen für die Häufigkeitsberechnungen erläutert und danach die diversen untersuchten Opazitätstabellen angeführt.

4.5.1 Häufigkeitsberechnungen

Der Unterschied zwischen den in der Spektroskopie gebräuchlichen Elementhäufigkeiten $\varepsilon = \varepsilon(X)$ und $[X/H]$ gegenüber der im Sternaufbau verwendeten Massenbruchteile X_i wurde bereits im Abschnitt 2.2 mittels der Gleichungen (2.31)-(2.33) dargelegt. Die chemischen Häufigkeiten der Sterne werden im allgemeinen spektroskopisch bestimmt, so daß für den Sternaufbau eine Umrechnung in Massenbruchteile erforderlich ist. Eine Umformung von Gleichung (2.31) ergibt:

$$\frac{n_i}{n_H} = \frac{N(X)}{N(H)} = \frac{\varepsilon}{10^{12}} \quad (4.51)$$

Damit kann mit Hilfe von Gleichung (2.32) der Massenbruchteil X_i in ein Verhältnis zum Wasserstoffmassenbruchteil X_H gesetzt werden:

$$\frac{X_i}{X_H} = \frac{m_i \cdot n_i}{m_H \cdot n_H} = \frac{m_i \cdot \varepsilon_i}{m_H \cdot 10^{12}} \quad (4.52)$$

$$X_i = m_i \cdot \varepsilon_i \cdot \frac{X_H}{m_H \cdot 10^{12}} \quad (4.53)$$

Ist der Wasserstoffmassenbruchteil X_H gegeben, so können die Massenbruchteile der anderen Elemente aus den spektroskopischen Häufigkeiten berechnet werden. Mit Hilfe der Bedingung

$$\sum_i X_i = 1 \quad (4.54)$$

kann aus Gleichung (4.52) der unbekannte Bruch in Gleichung (4.53) nun bestimmt werden:

$$\sum_i m_i \cdot \varepsilon_i = \frac{m_H \cdot 10^{12}}{X_H} \quad (4.55)$$

Auf diesem Weg lassen sich beliebige spektroskopische Häufigkeiten in Massenbruchteile umrechnen. Dennoch stehen die Opazitätstabellen für den Sternaufbau nicht für beliebige Elementmischungen zur Verfügung, sondern sind üblicherweise nur in drei Massenbruchteile gegliedert: In die Massenbruchteile für **Wasserstoff** X , **Helium** Y und die restlichen **Metalle** Z . Als Folge muß bei der Tabellierung der Opazitäten das Häufigkeitsverhältnis für alle Elemente, mit Ausnahme von Wasserstoff und Helium, festgelegt werden. Hierzu dient als Grundlage eine Bestimmung der solaren spektroskopischen Elementhäufigkeiten nach Anders & Grevesse (1989). Gegenüber der chemischen Häufigkeiten, die in dieser Arbeit zugrundegelegt wurden (vgl. Tabelle 3.1), ergeben sich zu Anders & Grevesse in Tabelle 4.1 geringe Änderungen, deren Auswirkungen auf die Modellrechnungen ebenfalls untersucht wurden.

Die Eichung der Entwicklungsmodelle an der heutigen Sonne erfordert, wie im Abschnitt 3.5 beschrieben, eine Anpassung des Massenbruchteils von Helium. Aus der Einhaltung der Bedingung (4.54) folgt die Veränderung von mindestens einem weiteren Massenbruchteil. Die Änderungen werden festgelegt durch die Annahme, daß sich eine Variation des Heliumgehalts anteilmäßig sowohl auf den Wasserstoff, als auch auf die Metalle verteilt. Das Verhältnis der Massenbruchteile des Wasserstoffs zu den Metallen soll demnach konstant gehalten werden. Mit den solaren spektroskopischen Häufigkeiten für diese Arbeit aus Tabelle 3.1 ergibt sich als konstantes Verhältnis

$$\frac{Z}{X} = 0.02479 \pm 0.00151 \quad (4.56)$$

während die Verwendung der Häufigkeiten von Anders & Grevesse folgenden Wert liefert:

$$\frac{Z}{X} = 0.02669 \pm 0.00163 \quad (4.57)$$

Tabelle 4.1 Solare meteoritische Elementhäufigkeiten nach Anders & Grevesse (1989) (A&G) und deren Abweichungen zu den verwendeten solaren Elementhäufigkeiten dieser Arbeit (Hol) gemäß Tabelle 3.1.

Element	A&G	A&G - Hol	Element	A&G	A&G - Hol
H	12.00	0.00	Ru	1.82	0.04
He	10.99	-0.01	Rh	1.09	-0.01
Li	3.31	0.03	Pd	1.70	0.08
Be	1.42	0.01	Ag	1.24	0.07
B	2.88	-0.27	Cd	1.76	0.08
C	8.56	-0.02	In	0.82	0.04
N	8.05	0.06	Sn	2.14	0.07
O	8.93	0.01	Sb	1.04	0.05
F	4.48	-0.02	Te	2.24	-0.08
Ne	8.09	0.36	I	1.51	-0.06
Na	6.31	0.02	Xe	2.23	-0.07
Mg	7.58	0.05	Cs	1.12	0.03
Al	6.48	0.05	Ba	2.21	0.03
Si	7.55	0.05	La	1.20	0.13
P	5.57	0.22	Ce	1.61	0.03
S	7.27	0.07	Pr	0.78	0.02
Cl	5.27	0.01	Nd	1.47	0.07
Ar	6.56	-0.27	Sm	0.97	0.09
K	5.13	0.08	Eu	0.54	0.06
Ca	6.34	-0.02	Gd	1.07	-0.06
Sc	3.09	0.10	Tb	0.33	-0.05
Ti	4.93	0.05	Dy	1.15	0.08
V	4.02	0.11	Ho	0.50	0.03
Cr	5.68	0.07	Er	0.95	0.09
Mn	5.53	0.06	Tm	0.13	0.08
Fe	7.51	0.00	Yb	0.95	0.15
Co	4.91	0.06	Lu	0.12	0.07
Ni	6.25	0.07	Hf	0.73	0.00
Cu	4.21	-0.03	Ta	0.13	-0.07
Zn	4.65	0.05	W	0.68	-0.30
Ga	3.13	0.48	Re	0.27	0.06
Ge	3.63	0.06	Os	1.38	0.04
As	2.37	0.07	Ir	1.37	0.01
Se	3.35	0.02	Pt	1.68	0.03
Br	2.63	-0.02	Au	0.83	0.01
Kr	3.23	0.13	Hg	1.09	-0.56
Rb	2.40	0.12	Tl	0.82	0.04
Sr	2.93	0.00	Pb	2.05	0.13
Y	2.22	0.04	Bi	0.71	0.06
Zr	2.61	0.15	Th	0.08	-0.18
Nb	1.40	-0.06	U	-0.49	-0.56
Mo	1.96	-0.14			

Die solare Metallhäufigkeit bei Anders & Grevesse (1989) ist folglich etwas größer und daher sind auch die Auswirkungen auf die Eichung an der heutigen Sonne zu untersuchen. Eine Bestimmung der Massenbruchteile für Wasserstoff, Helium und Metalle unter Einhaltung der Nebenbedingung (4.56) oder (4.57) kann durch den grundlegenden Zusammenhang $X + Y + Z = 1$ erfolgen. Nach Umstellung der Gleichung zu $X + Z = 1 - Y$ und Teilung durch X ergibt sich

$$1 + \frac{Z}{X} = \frac{1 - Y}{X} \quad (4.58)$$

oder schließlich die benötigte Gleichung:

$$X = \frac{1 - Y}{1 + \left(\frac{Z}{X}\right)_{spec.}} \quad (4.59)$$

Eine Variation des Massenbruchteils von Helium Y aufgrund einer Eichung an der heutigen Sonne, bedingt nun den Massenbruchteil des Wasserstoffs X unter Einhaltung der Nebenbedingung (4.56) oder (4.57). In diesem Zusammenhang ist durchaus von Interesse, welche Auswirkungen ein *unkorrektes* Eichverfahren auf die Entwicklungsrechnungen besitzt.

Ganz allgemein muß untersucht werden, welche Folgen sich aus geänderten Elementmischungen für eine differentielle Altersbestimmung ergeben. Dies wurde nicht nur für die Häufigkeiten der beiden Tabellen 3.1 und 4.1 durchgeführt, sondern auch für Entwicklungsmodelle mit überhäufigen Alpha-Elementen (vgl. Abschnitt 2.3). Aus spektroskopischen Analysen ergab sich nämlich, daß mit abnehmender Metallizität der Sterne eine relativ höhere Häufigkeit von Sauerstoff, Magnesium, Silizium, Schwefel, Calcium und Titan auftritt. Diese Gemeinsamkeit der genannten Elemente wird besser verständlich, wenn man beachtet, daß sich Alpha-Elemente in massereichen Sternen durch schrittweise Fusion mit Heliumkernen ausgehend von Kohlenstoff ergeben. So könnte die erste Sternengeneration nach dem Urknall beispielsweise aus besonders massiven Sternen bestanden haben, um den relativ höheren Anteil an Alpha-Elementen durch Fusionsreaktionen zu erzeugen.

Praktisch wird die Metallizität durch das Verhältnis $[\text{Fe}/\text{H}]$ bestimmt und bedeutet eine Änderung **aller** Elementhäufigkeiten mit Ausnahme von Wasserstoff und Helium. Bereits Sterne mit $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.6$ zeigen für Magnesium ein Verhältnis von etwa $[\text{Mg}/\text{Fe}] = 0.4$ auf. Im Allgemeinen wird der Wert einer relativen Magnesiumüberhäufigkeit aufgrund von spektroskopischen Untersuchungen auf alle Alpha-Elemente übertragen. Die Auswirkungen für eine Altersbestimmung mit und ohne Berücksichtigung dieses sogenannten **alpha-enhancement** konnten besonders gut untersucht werden, da auch Opazitätstabellen mit erhöhtem Anteil an Alpha-Elementen vorhanden waren.

4.5.2 Opazitätstabellen

Bereits zur Herleitung der Diffusionsgleichung des Strahlungstransports (2.20) wurde von einer *geeigneten* Mittelung der Opazitäten über das gesamte Frequenzspektrum Gebrauch gemacht. Während bei der Berechnung von Modellatmosphären zur Verringerung des numerischen Aufwands noch frequenzabhängige ODF-Tabellen mit vorgegebenen Elementhäufigkeiten eingesetzt werden, dürfen bei der Modellierung des Sternaufbaus frequenzgemittelte Opazitätstabellen herangezogen werden. Da mit Ausnahme des äußeren Sternrands der Strahlungstransport in guter Näherung diffusionsartig erfolgt (vgl. Abb. 4.3),

ist diese weitere Vereinfachung unproblematisch. Als *geeignetes* Mittel hat sich die **mittlere Rosselandsche Opazität** κ_r erwiesen, die sich aus der Gewichtung der frequenz-abhängigen Opazität κ_ν mit der nach der Temperatur abgeleiteten Planckfunktion $B_\nu(T)$ ergibt:

$$\frac{1}{\kappa_r} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu} \quad (4.60)$$

So werden diejenigen Opazitäten am stärksten gewichtet, die einen großen Beitrag zur Temperaturänderung und für die Variation des Strahlungsfelds liefern.

Die mittleren Opazitäten werden für bestimmte Elementmischungen berechnet und stehen als Tabellenwerte in Abhängigkeit von Temperatur, Dichte sowie der Massenbruchteile von Wasserstoff, Helium und Metallen zur Verfügung. Eine Interpolation zwischen Tabellenwerten erfolgt mittels Bikubischer Splines (Spaeth 1973). Die Opazitätsdaten für das Referenzmodell stammen von Rogers & Iglesias (1992). Diese sogenannten **OPAL-Daten** wurden für die Metallzusammensetzung nach Anders & Grevesse (1989) berechnet (vgl. Tabelle 4.1). Jedoch wurden in diesem Fall nicht die meteoritischen sondern die spektroskopischen Elementhäufigkeiten herangezogen. Der größte Unterschied liegt dabei in einer um 0.16 dex höheren spektroskopischen Eisenhäufigkeit.

Weiterhin wurden die Opazitäten nicht für explizit alle, sondern nur für die zwölf häufigsten Metalle berechnet. Die Häufigkeiten der fehlenden Metalle wurden jeweils zu den berechneten Elementen addiert, deren Ordnungszahl am nächsten lag. Insofern spielt der Unterschied zwischen meteoritischen oder spektroskopischen solaren Häufigkeiten gemäß Anders & Grevesse keine entscheidende Rolle, da derartige Näherungen eine ebenbürtige Unsicherheit darstellen. Die Berechnungen enthalten außerdem keine Elektronenleitungsopazitäten, so daß diese nach Itoh *et.al.* (1983) errechnet und den Tabellen hinzugefügt wurden. Schließlich liegt die untere Temperaturgrenze der Tabellen bei $T = 6000$ K. Für die kühleren Opazitäten wurden Tabellen von Weiss *et.al.* (1990) herangezogen. Alle Tabellen wurden zusammen mit den Elektronenleitungsopazitäten durch A. Weiss vom Max-Planck-Institut für Astrophysik zu einer gemeinsamen Opazitätstabelle kombiniert und für diese Arbeit freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

In Folge der Untersuchungen zur äußeren Randbedingung bei den Sternaufbaumodellen stellte sich heraus, daß die kühleren Opazitäten aufgrund mangelnder Qualität ersetzt werden sollten (vgl. Abschnitt 4.8.3). Dieses Problem wurde anfänglich noch durch eigene Opazitätstabellen behoben, doch sehr bald fanden die Tabellen mit kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) ihre Verwendung. Sie wurden erneut von A. Weiss mit den OPAL-Daten von 1992 und den Elektronenleitungsopazitäten zu gemeinsamen Tabellen kombiniert, und anschließend konnten ihre Auswirkungen auf die Entwicklungsmodelle untersucht werden.

Später verbesserten Iglesias & Rogers (1996) ihre OPAL-Daten durch die Berücksichtigung der 19 häufigsten Metalle (anstatt bisher zwölf Metallen). Auch in diesem Fall wurden mit kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) und Elektronenleitungsopazitäten nach Itoh *et al.* (1983) kombinierte Tabellen erzeugt und untersucht.

Schließlich standen durch A. Weiss noch kombinierte Tabellen mit einem höheren Anteil an Alpha-Elementen zur Verfügung. Die Anreicherung betrug $[\alpha/\text{Fe}] = +0.40$ und die Opazitäten stammten erneut von Iglesias & Rogers, sowie von Alexander & Ferguson (s. Salaris & Weiss 1998). Somit wurden Untersuchungen zu den Auswirkungen einer Anreicherung von Alpha-Elementen möglich.

4.6 Diffusion

Lange Zeit wurde einer Änderung der chemischen Zusammensetzung durch diffusionsartigen Teilchentransport fast keine Aufmerksamkeit geschenkt. Aus unterschiedlichen Betrachtungen ergab sich als typische Diffusionszeitskala $\tau_0 \approx 10^{13}$ Jahre für die Sonne, weshalb derartige Prozesse bei hauptreihenahen Sternen für vernachlässigbar gehalten wurden (Kippenhahn & Weigert 1990). Im Abschnitt 4.8.6 wird jedoch zu sehen sein, daß eine Änderung der chemischen Zusammensetzung durch Diffusion im Sternaufbau und der Sternentwicklung durchaus beachtliche Auswirkungen aufweisen kann. Die Teilchendiffusion kann in drei verschiedene Fälle unterteilt werden:

- Die **Konzentrationsdiffusion** versucht Häufigkeitsunterschiede in verschiedenen Regionen eines Sterns auszugleichen. Sie wird beispielsweise eine hohe Heliumkonzentration im Sterninneren gegenüber der Sternhülle durch einen Aufwärtstransport von Heliumkernen im Stern ausgleichen.
- Die **Druckdiffusion** auch als gravitative Sedimentation bekannt, verursacht aufgrund des Druckgradienten innerhalb eines Sterns das Absinken der schwereren chemischen Elemente gegenüber dem leichteren Wasserstoff.
- Die **Thermodiffusion** bewirkt ebenfalls ein Absinken der schwereren Elemente gegenüber dem Wasserstoff aufgrund des vorhandenen Temperaturgradienten.

Die mathematische Behandlung von Diffusionsprozessen ist eine komplizierte Problemstellung der Transporttheorie. Die Beschreibung der gaskinetischen Eigenschaften erfolgt im Allgemeinen unter Verwendung einer Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, welche die Anzahl der Teilchen beschreibt, die sich zum Zeitpunkt t am Ort $\mathbf{r}$ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ befinden (Reif 1987, Kapitel 12-14). Für ein Gas aus Teilchen der Masse m , mit der Teilchenzahldichte n , ist im Fall des thermodynamischen Gleichgewichts die von der Temperatur T abhängige Maxwell-Boltzmann Verteilungsfunktion gültig:

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (4.61)$$

In guter Näherung kann diese Verteilungsfunktion auch für das Sterninnere angewandt werden. Jedoch treten geringe Abweichungen auf, die für eine Beschreibung der Diffusion entscheidend sind. Die *exakte* Verteilungsfunktion für das Gas im Sterninneren erhält man über die Frage nach den Bedingungen, die von dieser Verteilungsfunktion erfüllt werden müssen. Werden Teilchen betrachtet, die sich zum Zeitpunkt t am Phasenraumpunkt $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ befinden, so nehmen sie unter der Wechselwirkung mit äußeren Kräften aber ohne Berücksichtigung von Stößen zum Zeitpunkt $t' = t + dt$ den Phasenraumpunkt $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ ein, wobei:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \quad (4.62)$$

Die Anzahl der Teilchen, welche aufgrund von Stößen pro Zeiteinheit den Phasenraumpunkt $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ verlassen oder erreichen, kann formal durch die funktionale Abhängigkeit $Df(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ beschrieben werden. Damit läßt sich eine Bedingungsgleichung für die Verteilungsfunktion der Teilchen formulieren.

Diese Bedingungsgleichung ist die sogenannte **Boltzmann-Gleichung**:

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} + Df(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} dt \quad (4.63)$$

Die Lösung der Boltzmann-Gleichung ist im konkreten Fall meist sehr schwierig, da in ihr für die Verteilungsfunktion sowohl partielle Ableitungen, als auch Integrationen (für die Stoßterme) über das gesamte Phasenraumvolumen vorkommen. Nachdem im Sterninneren die Maxwell-Boltzmann Verteilung (4.61) eine gute Näherung darstellt, können in diesem Fall Näherungslösungen der Boltzmann-Gleichung mittels Störungsrechnung gewonnen werden (Burgers 1969, Chapman & Cowling 1970). Die von Burgers (1969) abgeleiteten Gleichungen zur Behandlung der Diffusion in einem mehrkomponentigen Plasma haben sich weitgehend durchgesetzt. Sie stellen auch die Grundlage zur Diffusionsbehandlung in dieser Arbeit dar und werden daher in einer für den Sternaufbau passenden Form gemäß Thoul, Bahcall & Loeb (1994) angeführt.

Mit einer normierten Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ errechnet sich die mittlere Teilchengeschwindigkeit $\mathbf{u}_i$ der i -ten Teilchenart wie folgt:

$$\mathbf{u}_i = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (4.64)$$

Zusammen mit der entsprechenden Teilchenzahldichte n_i , der Teilchenmasse m_i und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_i m_i n_i \mathbf{u}_i}{\sum_i m_i n_i} \quad (4.65)$$

aller Teilchen, gilt dann für die Massenerhaltung:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u})) = \left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{nucl.} \quad (4.66)$$

Die rechte Seite von Gleichung (4.66) trägt der Änderung der Teilchenzahl durch nukleare Reaktionen Rechnung. Für die Energie- und Impulserhaltung werden die Wechselwirkungsterme der Teilchenarten untereinander benötigt. Die Teilchenstöße werden im wesentlichen durch Streuung am Coulomb-Potential hervorgerufen. Allerdings divergieren die Stoßintegrale unter Verwendung eines reinen Coulomb-Potentials. Eine nähere Betrachtung des Sachverhalts zeigt, daß durch die freien Elektronen innerhalb eines Plasmas eine Abschirmung des Coulomb-Potentials der positiven Ionen erfolgt. Als gute Näherung für die Wechselwirkung zweier Teilchen mit den Ladungszahlen Z_i und Z_j hat sich aufgrund des geschilderten *Abschirmungseffekts* das sogenannte **Debye-Hückel-Potential**

$$V_{ij}(r) = \frac{Z_i Z_j e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (4.67)$$

erwiesen, wobei die **Debye-Abschirmungslänge** λ_D durch Paquette *et al.* (1986) wie folgt gegeben ist:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 \sum_i n_i Z_i^2}} \quad (4.68)$$

Damit kann aus den Stoßintegralen der benötigte Reibungsterm K_{ij} zur Berechnung der Energie- und Impulserhaltung bestimmt werden:

$$K_{ij} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{m_i + m_j}{m_i m_j}} \left(\frac{2}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} n_i n_j (e^2 Z_i Z_j)^2 \ln \Lambda_{ij} \quad (4.69)$$

Der sogenannte **Plasmaparameter** Λ_{ij} ist eine Näherungsgröße und wurde in der zugrundeliegenden Arbeit von Thoul, Bahacall & Loeb (1994) wie folgt gewählt:

$$\ln \Lambda_{ij} = \frac{1.6249}{2} \ln \left(1 + 0.18769 \frac{4kT\lambda_D}{e^2 Z_i Z_j} \right) \quad (4.70)$$

Unter Verwendung des **wirksamen Wärmestromvektors** von Burgers (1969)

$$\mathbf{w}_i = \frac{m_i}{2kT} \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 d\mathbf{v} - \frac{5}{2}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}) \quad (4.71)$$

ergibt sich mit einem äußeren elektrischen Feld E und der Schwerebeschleunigung g , sowie dem Druck P_i , der Massendichte ρ_i und der Ladungsdichte ρ_{ei} der i -ten Komponente für die Impulserhaltung

$$\frac{dP_i}{dr} + \rho_i g + \rho_{ei} E = \sum_{i \neq j} K_{ij} \left[(u_j - u_i) + 0.6 \cdot \frac{w_i m_j - w_j m_i}{m_i + m_j} \right] \quad (4.72)$$

und für die Energieerhaltung folgender Ausdruck:

$$\frac{5}{2} n_i k \frac{dT}{dr} = \sum_{i \neq j} K_{ij} \left[\frac{3}{2} \frac{m_j}{m_i + m_j} (u_i - u_j) - \frac{L_{ij}}{(m_i + m_j)^2} \right] - 0.8 K_{ii} w_i \quad (4.73)$$

Dabei steht die Variable L_{ij} für folgenden Ausdruck:

$$L_{ij} = 1.6 m_i m_j (w_i + w_j) + (3m_i^2 + 1.3m_j^2) w_i - 4.3 m_i m_j w_j \quad (4.74)$$

Durch Summation über alle Teilchen ergibt sich aus Gleichung (4.72) die Randbedingung

$$\sum_i \left(\frac{dP_i}{dr} + \rho_i g + \rho_{ei} E \right) = 0 \quad (4.75)$$

Außerdem müssen noch Strom- und Ladungsneutralität, sowie die lokale Massenerhaltung bestehen bleiben:

$$\sum_i \rho_{ei} (u_i - u) = 0 \quad \sum_i \rho_{ei} = 0 \quad \sum_i \rho_i (u_i - u) = 0 \quad (4.76)$$

Zu einem festen Zeitpunkt können aus den linearen Gleichungen (4.72) und (4.73) zusammen mit der Stromneutralität und der Massenerhaltung (4.76) für alle Teilchenarten die

wirksamen Wärmestromvektoren w_i und die mittleren Teilchengeschwindigkeiten u_i , sowie die elektrische Feldstärke E und die Schwerebeschleunigung g berechnet werden. Bahcall, Thoul & Loeb (1994) entwickelten zu diesem Zweck ein effizientes numerisches Verfahren. Ihren Programmcode stellten sie auf Anfrage zur Verfügung und H. Schlattl vom Max-Planck Institut für Astrophysik führte einen großen Teil der Implementierungsarbeiten für das Sternentwicklungsprogramm durch.

Die unabhängige Ermittlung der Schwerebeschleunigung aus dem Gleichungssystem von Bahcall, Thoul & Loeb ist ein willkommener Test für die numerische Genauigkeit des Lösungsverfahrens. Die Abweichungen zur Schwerebeschleunigung aus dem hydrostatischen Gleichgewicht beträgt bei den Sternmodellen in dieser Arbeit etwa 10^{-7} , was die hohe numerische Qualität der Entwicklungsmodelle dokumentiert.

4.7 Zustandsgleichung

Im Abschnitt 3.1 wurde geschildert, daß die bloße Verwendung der idealen Gasgleichung zusammen mit der Saha-Boltzmann Gleichung (2.29) keine ausreichend korrekte Beschreibung der Zustandsgleichung darstellt. Während eine Berücksichtigung der Entartung des Elektronengases keine großen Probleme bereitet, stellt die sogenannte **Druckionisation** durchaus eine Schwierigkeit dar. So ergibt die Saha-Boltzmann Gleichung im Sonneninneren einen Anteil von etwa 24% neutralen Wasserstoff, obwohl unter diesen Bedingungen vollständige Ionisation vorliegt (Kippenhahn & Weigert 1990). Durch die Erhöhung des Drucks verringert sich der mittlere Abstand der Ionen. Die Superposition der Coulomb-Potentiale führt zu einer Abnahme der Ionisierungsenergie, die einen höheren Ionisationsanteil bewirkt. Entsprechend findet in der ursprünglichen Version des Sternentwicklungsprogramms eine unterschiedliche Behandlung der Zustandsgleichung statt. Dabei wird zwischen Bereichen mit Saha-Boltzmann Gleichung, teilweiser Ionisation und vollständiger Ionisation unterschieden.

Eine verbesserte Behandlung der Druckionisation wurde von Eggleton, Faulkner & Flannery (1973) mit Hilfe genäherter Ausdrücke für die freie Energie formuliert. Ihr Verfahren erhielt später beispielsweise durch die Einführung eines Debye-Hückel-Potentials (4.67) anstelle des Coulomb-Potentials zusätzliche Korrekturen. Mihalas, Däppen & Hummer (1988) zogen ebenfalls die freie Energie zu einer verbesserten Formulierung der Zustandsgleichung heran. Auch sie benutzten ein abgeschirmtes Coulomb-Potential und berücksichtigten eine teilweise Entartung des Elektronengases. Ihr Verfahren ist zwar exakter, dabei jedoch entsprechend aufwendig. Zur praktischen Berechnung von Sternaufbaumodellen wird daher eine Tabellierung der Dichte als Funktion von Druck, Temperatur und chemischer Zusammensetzung erforderlich. Solche Tabellen stehen jedoch oft nur im Bereich der Sonnenmodelle vollständig zur Verfügung.

Um im Rahmen dieser Arbeit auch eine Abschätzung der Auswirkungen einer verbesserten Zustandsgleichungen auf die differentielle Altersbestimmung zu erhalten wurde die OPAL-Zustandsgleichung von Rogers, Swenson & Iglesias (1996) herangezogen. Die Autoren haben eine quantenstatistische Behandlung des Vielteilchenproblems durchgeführt. Entsprechend zum mathematischen Aufwand, liegt auch in diesem Fall die Zustandsgleichung in Tabellenform vor. Die Besonderheit an diesen Tabellen liegt darin, daß auch die OPAL Opazitätsdaten unter Verwendung dieser Zustandsgleichung bestimmt wurden und somit eine konsistente Behandlung von Zustandsgleichung und Opazitäten innerhalb eines Programms erfolgen kann.

4.8 Ergebnisse

Die bisher genannten Modifikationen in der Modellphysik weisen durchaus unterschiedliche Auswirkungen auf Entwicklungswege und Altersbestimmung auf. Die folgende Diskussion der erzielten Ergebnisse erfolgt speziell unter Berücksichtigung der spektroskopisch erreichbaren Genauigkeiten in der Bestimmung von stellaren Parametern. Den detaillierten spektroskopischen Untersuchungen von Fuhrmann, Pfeiffer & Bernkopf (1997, 1998), Fuhrmann & Bernkopf (1999) sowie Klaus Fuhrmann (2000), kann entnommen werden, daß die derzeitigen Beobachtungs- und Auswertungstechniken *bestenfalls* stellare Parameter mit einer Genauigkeit von $\Delta T_{eff} = \pm 50$ K und $\Delta M_{bol} = \pm 0.05$ mag erlauben. Letzterer Fehler spiegelt im Wesentlichen die Unsicherheit in der Bestimmung der bolometrischen Korrektur wieder. Die bolometrischen Helligkeiten aus den Beobachtungsdaten des HIPPARCOS Satelliten (Perryman *et al.*, 1997) besitzen bis zu einer Entfernung von etwa 100 Parsec eine höhere Genauigkeit gegenüber den spektroskopischen Schwerebeschleunigungen. Entsprechend wurde zur weiteren Orientierung in den Ergebnisgrafiken ein Fehlerkreuz mit obigen Werten eingebracht und zur Repräsentation ausschließlich Effektivtemperatur gegen bolometrische Helligkeit angetragen.

Die Entwicklungswege wurden im Fall solarer Metallizität für 1.0 und 0.8 Sonnenmassen dargestellt, da sich bei geringeren Massen die Sterne im Vergleich zu einem geschätzten Weltalter von 20 Milliarden Jahren nicht weit von der Nullalter-Hauptreihe entfernt haben können. Außerdem wird die Bestimmung stellarer Parameter bei kühleren Effektivtemperaturen als $T_{eff} = 4800$ K aus spektroskopischen Gründen problematisch. Die Vergleiche wurden zwar auch für Sterne größerer Massen durchgeführt, doch sind diese aufgrund der geringeren Sternalter weniger von Interesse, da sie kaum Rückschlüsse auf die Entwicklung unserer Galaxis erlauben. Repräsentativ für metallarme Sterne wurden Entwicklungswege für $[Fe/H] = -2.0$ mit 0.9 und 0.7 Sonnenmassen dargestellt. Auch hier gelten die obigen Argumente bezogen auf größere und kleinere Sternmassen. Im Folgenden werden die einzelnen Untersuchungsergebnisse skizziert, während eine quantitative Gegenüberstellung der Auswirkungen auf eine Altersbestimmung zum Abschluß dieses Kapitels erfolgt.

4.8.1 Vorhaupttreihenentwicklung

Aus Abbildung 4.5 ist zu erkennen, daß eine Berücksichtigung der Vorhaupttreihenentwicklung keine Änderung der Entwicklungswege nach sich zieht. Weder Mischungswegparameter noch der Massenbruchteil des Heliums mußten gegenüber dem Referenzmodellen (vgl. Abschnitt 4.1) geändert werden, um die Modelle mit Vorhauptreihe an der heutigen Sonne zu eichen. Offenbar stellt es keinen Unterschied dar, ob ein chemisch homogenes Startmodell in Nähe der Nullalter-Hauptreihe oder mit einem Anteil von Gravitationsenergie auf der Vorhauptreihe erzeugt wird. In beiden Fällen erreichen die Modellfolgen die identische Nullalter-Hauptreihe mit einem identischen Sternaufbau. Wird beachtet, daß auf der Vorhauptreihe der Stern vollständig konvektiv ist und die Energieerzeugung nicht durch nukleare Reaktionen erfolgt, so ist das oben genannte Ergebnis verständlich. Beide Fälle stellen einen Relaxationsprozeß dar, der erst mit dem Einsetzen der nuklearen Energieerzeugung beendet wird. Dabei spielt es keine Rolle, ob der Relaxationsprozeß von kurzer oder längerer Dauer ist. **Die Vorhaupttreihenentwicklung nimmt demnach keinen Einfluß auf die Altersbestimmung der Sterne.**

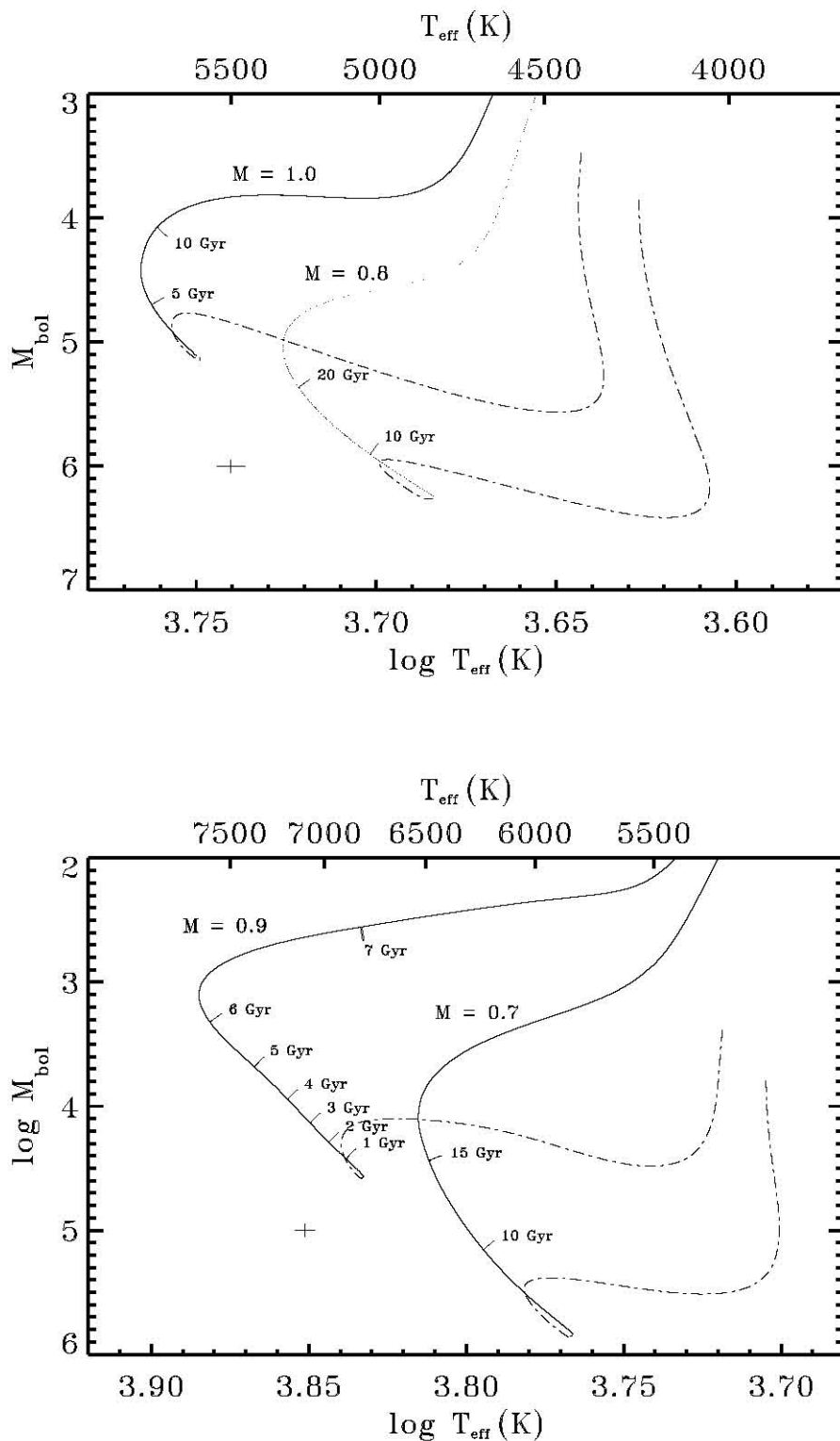


Abbildung 4.5 Entwicklungswege für solare chemische Häufigkeit (oben) und $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ (unten) für verschiedene Massen in Einheiten der Sonnenmasse. In beiden Diagrammen wurden die Entwicklungswege mit Vorhaupttreihenentwicklung in unterbrochener Linie über die durchgezogenen Entwicklungswege ohne Vorhaupttreihenentwicklung gezeichnet. Die beiden Fehlerkreuze stellen die Genauigkeitsgrenzen in der Bestimmung stellarer Parameter dar.

4.8.2 Opazitätstabellen

Anhand der unterschiedlichen Opazitätstabellen aus dem Abschnitt 4.5.2 wird im Folgenden ein Einblick in die Genauigkeit bei der Erstellung der Sternaufbaumodelle gegeben. Aus dem Übergang von den kühlen Opazitäten von Weiss *et.al.* (1990) zu den Daten von Alexander & Ferguson (1994) ohne eine erneute Kalibrierung an der heutigen Sonne ergibt sich für ein Sonnenmodell die Situation nach Abbildung 4.6.

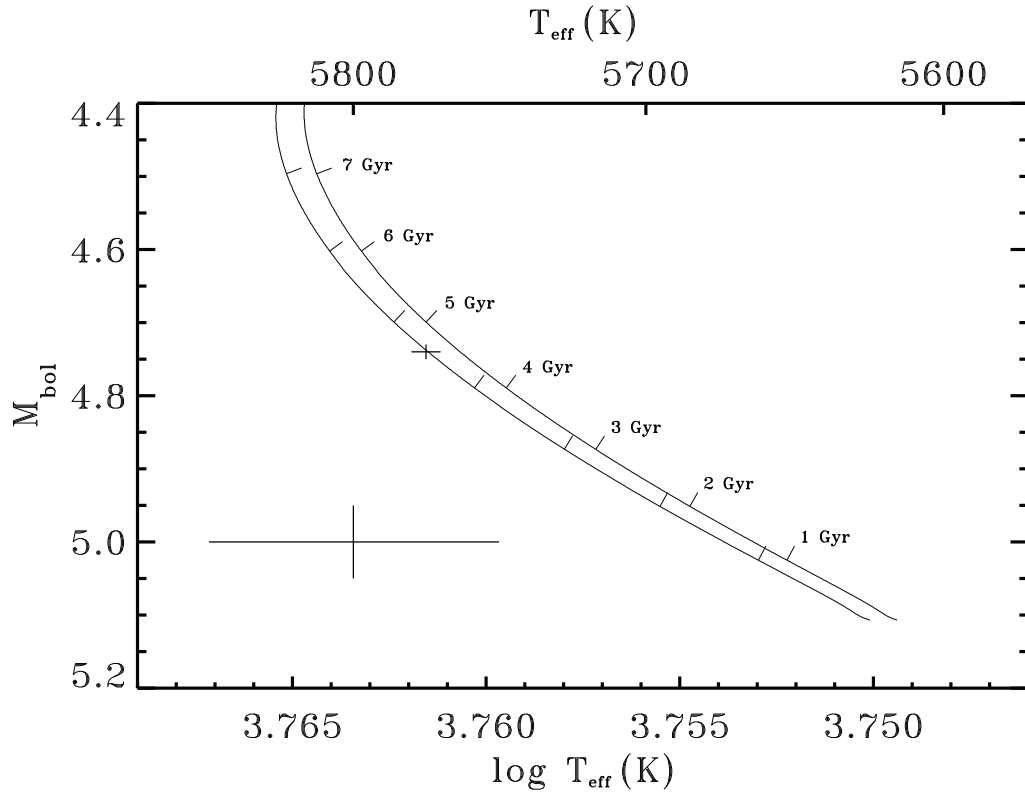


Abbildung 4.6 Entwicklungswege für die Sonne, wobei links der kalibrierte Weg mit kühlen Opazitäten nach Weiss *et.al.* (1990) verwendet wurde (Referenzmodell). Der rechte Entwicklungsweg wurde mit identischem Mischungswegparameter und Heliumhäufigkeit jedoch mit den kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) errechnet. Das kleine Kreuz an der Position der heutigen Sonne besitzt $\Delta T_{\text{eff}} = 5 \text{ K}$ und $\Delta M_{\text{bol}} = 0.02 \text{ mag}$. Zum Vergleich ist links unten auch das Fehlerkreuz für die Bestimmung stellarer Parameter basierend auf Spektroskopie und Daten des HIPPARCOS Satelliten eingezeichnet.

Schon hier wird erkennbar, daß die auftretenden Abweichungen wesentlich geringer als die Fehler der stellaren Parameter aus der Beobachtung sind. Ohne Eichung ergibt das Modell der heutigen Sonne mit den neuen Opazitäten nur eine 11 K tiefere Effektivtemperatur. Dennoch wurde bei allen Änderungen in der Modellphysik eine erneute Kalibrierung an der heutigen Sonne durchgeführt, da gemäß Abschnitt 3.5 eine vollständig differentielle Bestimmung der stellaren Parameter in Bezug auf die Sonne angestrebt wird. Entsprechend mußte der Mischungswegparameter vom Referenzwert 1.587 auf 1.615 und der Massenbruchteil des Heliums von 0.2732 auf 0.2730 angepasst werden. Die Heliumanpassung entspricht hier einer Änderung um $3 \cdot 10^{-3}$ Einheiten der Sonnenleuchtkraft. Anders ausgedrückt würde nur unter Anpassung der Mischungsweglänge die Sonnenleuchtkraft etwa 30 Millionen Jahre zu spät erreicht werden.

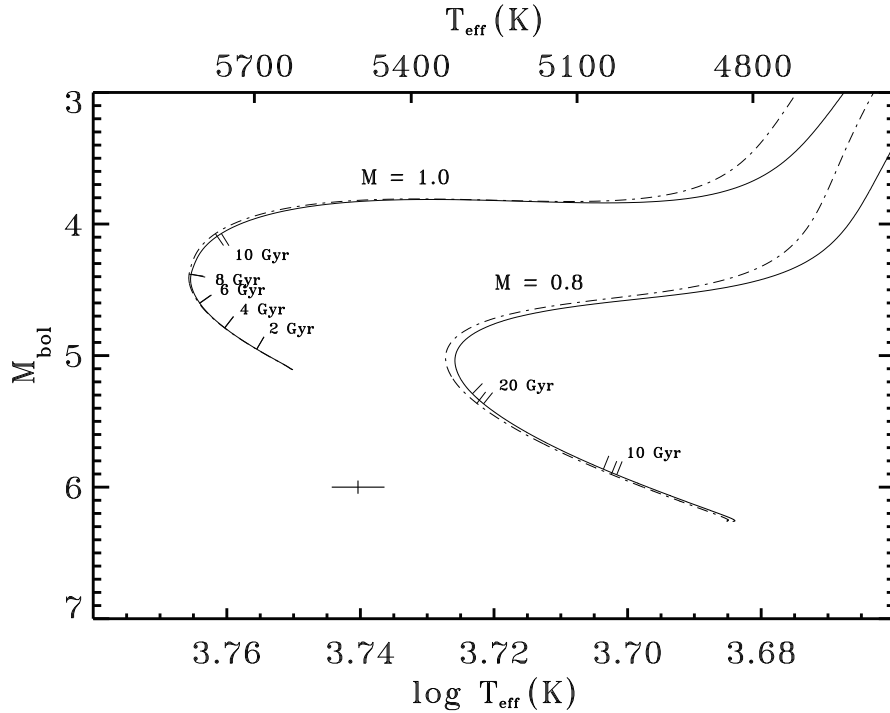


Abbildung 4.7 Entwicklungswege für solare Häufigkeiten mit Massen in Einheit der Sonnenmasse. Durchgezogene Wege mit kühlen Opazitäten nach Weiss *et.al.* (1990) und unterbrochene Wege mit kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994). Das Fehlerkreuz gibt erneut die Genauigkeit für eine Bestimmung von stellaren Parametern an. Bei den Entwicklungswegen mit 0.8 Sonnenmassen wurden für das Referenzmodell zusätzlich Zeitmarken für 11 und 21 Milliarden Jahre angebracht.

Dies ist zwar in der Abbildung 4.6 ein verschwindend kleiner Effekt, der jedoch in den numerischen Modellen durchaus berücksichtigt wurde. Nach erfolgter Kalibrierung an der heutigen Sonne ergibt sich für solare Häufigkeiten Abbildung 4.7. Während für eine Sonnenmasse erst ab dem Turn-off das Sternalter um 0.2 Milliarden Jahre geringer wird, sind auf den ersten Blick Sterne mit 0.8 Sonnenmassen um etwa 0.2 Milliarden Jahre älter geworden. Allerdings fällt bei einer näheren Betrachtung auf, daß Entwicklungswege gleicher Masse unter Verwendung der Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) etwas höhere Effektivtemperaturen aufweisen, als mit den Daten von Weiss *et.al.* (1990).

Derartige Änderungen in der Lage von Entwicklungswegen wurden bei allen Untersuchungen zusätzlich berücksichtigt. Hat beispielsweise ein Stern mit 0.8 Sonnenmassen und den Opazitätsdaten von Weiss *et.al.* (1990) ein exaktes Alter von 10 Milliarden Jahren, so erhält man mit den Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) als Alter 11.9 Milliarden Jahre und 0.79 Sonnenmassen für denselben Stern (s. Abbildung 4.8). Damit hätte der Stern also ein 1.9 Milliarden Jahre höheres Alter. Analog ergibt sich für den Stern mit einer Sonnenmasse ein um 0.3 Milliarden Jahre geringeres Alter. Allerdings ist auch zu beachten, daß gerade in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe bei geringen Sternmassen eine kleine Massenänderungen zwar nur eine kleine Variation der Effektivtemperatur aber eine große Variation im Alter nach sich zieht (vgl. Text zur Abbildung 4.8). Den Aspekt der überhaupt erreichbaren Altersgenauigkeit sollte man bei den Auswirkungen auf die Modellphysik nicht aus den Augen verlieren.

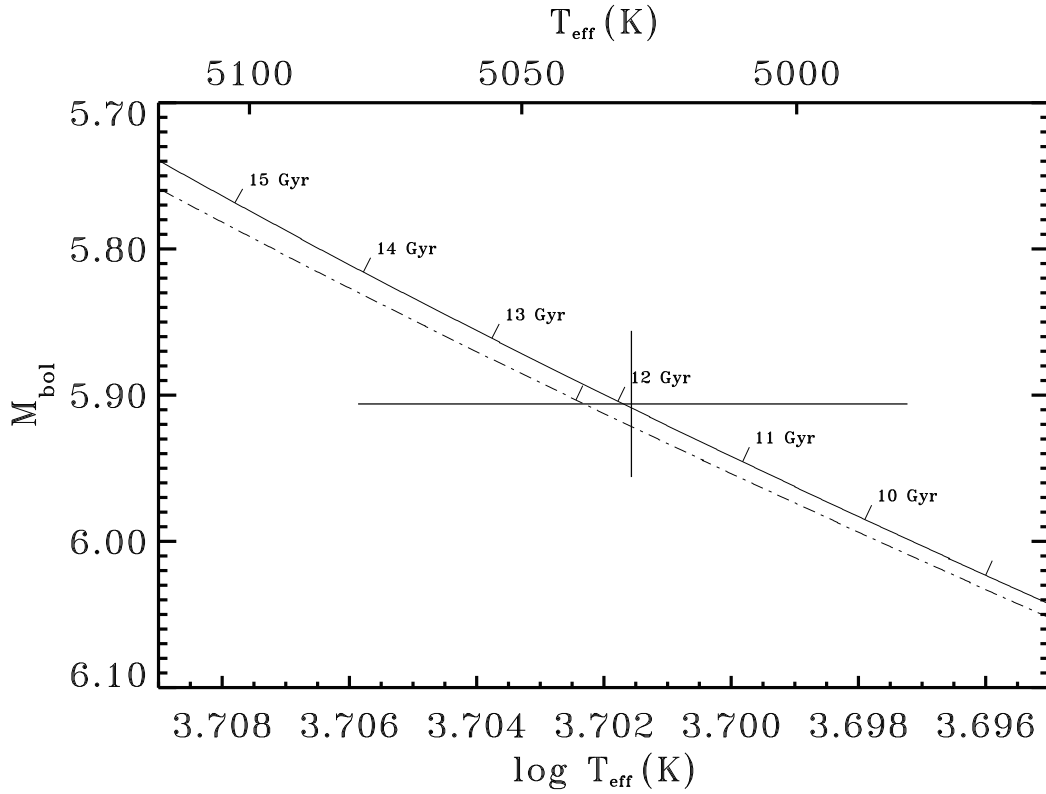


Abbildung 4.8 Entwicklungswege für solare Häufigkeiten für 0.79 (durchgezogen) und 0.80 Sonnenmassen (unterbrochen) mit kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994). Bei dem 0.80 Sonnenmassen Stern wurde nur die Altersmarke für 10 Milliarden Jahre eingetragen. Das Fehlerkreuz, erneut in der unteren Genauigkeitsgrenze für eine Bestimmung von stellaren Parametern, befindet sich auf der Position eines 10 Milliarden Jahre alten 0.80 Sonnenmassensterns, jedoch bei Verwendung der kühlen Opazitäten von Weiss *et.al.* (1990). Zwar beträgt die Altersänderung beim Übergang zwischen beiden Opazitätstabellen 1.9 Milliarden Jahre, doch ist in diesem Teil des Hertzsprung-Russell-Diagramms aufgrund der Beobachtungsgenauigkeit eine Altersbestimmung auf bestenfalls 6 Milliarden Jahre genau.

Abbildung 4.9 zeigt beim Vergleich der beiden unterschiedlichen kühlen Opazitäten für Entwicklungswege geringer Metallhäufigkeit noch weniger Auswirkungen. Die Altersunterschiede liegen letztendlich sogar unter 150 Millionen Jahren. Damit läßt sich folgern:

Die Verwendung der kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) führt zwar bei solarer Elementhäufigkeit zu etwas geänderten Sternaltern. Im Vergleich zur erzielbaren Genauigkeit können die Unterschiede jedoch vernachlässigt werden. Erst am Riesenast, wenn die Regionen mit kühlen Temperaturen einen größeren Anteil am gesamten Sternaufbau besitzen, erfolgt eine deutliche Beeinflussung der Entwicklungswege durch kühle Opazitäten.

Der Übergang von den alten OPAL-Daten (Rogers & Iglesias, 1992) zu den verbesserten Opazitäten nach Iglesias & Rogers (1996) ergibt für solare Häufigkeiten identische Auswirkungen, wie die Einführung der kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (Abbildung 4.10 oben). Allerdings mußte der Massenbruchteil für Helium auf 0.2739 und der Mischungswegparameter auf 1.603 geeicht werden. Abbildung 4.10 unten belegt für solare Häufigkeiten die erwähnte Identität beim Wechsel der Opazitäten. Erst bei geringerer Metallhäufigkeit sind Unterschiede in den Entwicklungswegen zwischen den OPAL-Daten von 1992 und 1996 deutlich erkennbar (Abbildung 4.11).

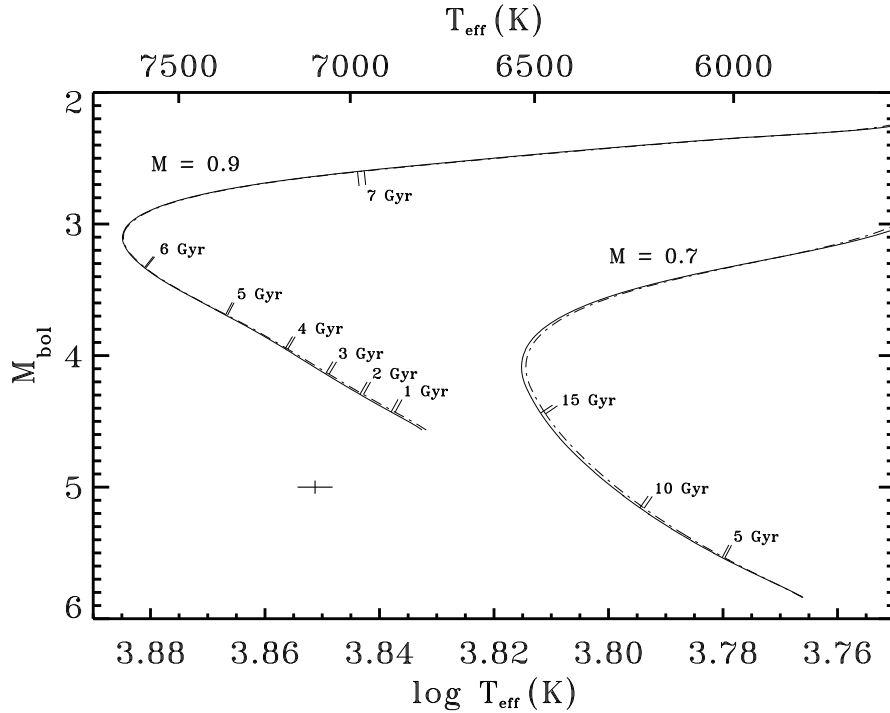


Abbildung 4.9 Entwicklungswege für $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ mit Massen in Einheit der Sonnenmasse. Durchgezogene Wege mit kühlen Opazitäten nach Weiss *et al.* (1990) und unterbrochene Wege mit kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994). Das Fehlerkreuz gibt die Genauigkeit für eine Bestimmung von stellaren Parametern an.

Obwohl die Hinzunahme der Elemente P, Cl, K, Ti, Cr, Mn und Ni zu den zuvor berücksichtigten Metallen C, N, O, Ne, Na, Mg, Al, Si, S, Ar, Ca und Fe nur 0.25% zur Metallhäufigkeit beiträgt sind die Auswirkungen nicht zu übersehen. Eine entsprechend detaillierte Untersuchung wurde von Iglesias & Rogers (1996) angeführt. In Hinblick auf die Altersbestimmung von Sternen machen sich die geänderten Opazitäten jedoch wiederum nur in geringem Ausmaß bemerkbar. Abbildung 4.12 oben zeigt die Möglichkeit, die Abweichungen des 0.90 Sonnenmassen Entwicklungsweges mit den OPAL-Daten von 1996 gegenüber dem Referenzmodell durch einen Entwicklungsweg mit 0.91 Sonnenmassen fast vollständig zu kompensieren. Einziger Unterschied ist, daß die Alter der Feldsterne mit den OPAL-Daten von 1996 um 0.25 Milliarden Jahre geringer geschätzt werden gegenüber den Altersangaben, die sich aufgrund des Referenzmodellsatzes ergeben. Ebenso läßt sich auch für 0.70 Sonnenmassen eine Kompensation erreichen (Abbildung 4.12 unten) in deren Folge beobachtete Sterne etwa 0.9 Milliarden Jahre jünger bestimmt werden gegenüber den Referenzmodellen. In beiden Fällen ist jedoch die Unsicherheit aufgrund der Beobachtungsfehler größer.

Damit sind die Opazitäten von Iglesias & Rogers (1996) zwar aufgrund von Sternaufbau und besserer Repräsentation der chemischen Elemente den Opazitätsdaten von Rogers & Iglesias (1992) vorzuziehen, doch ergeben sich nur geringfügige Unterschiede in der Altersbestimmung.

Dieser Sachverhalt, daß eine verbesserte Modellphysik kaum eine Änderung in der Altersbestimmung hervorruft sondern sich hauptsächlich nur durch Strukturänderungen im Sternaufbau bemerkbar macht, zeichnet sich im nächsten Abschnitt noch deutlicher ab.

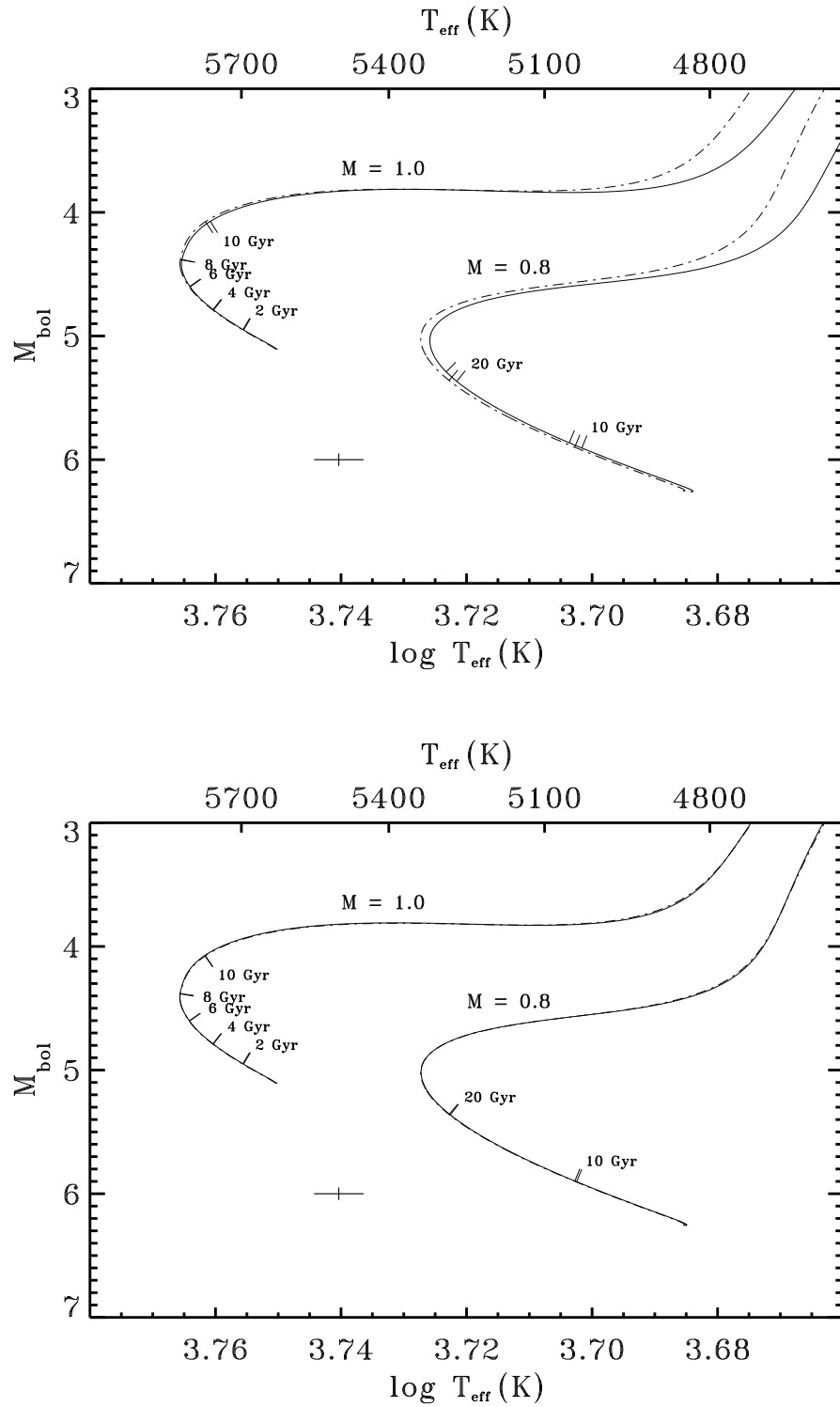


Abbildung 4.10 Entwicklungswege für solare Elementhäufigkeit mit Massen in Einheit der Sonnenmasse und Fehlerkreuze mit der Genauigkeit für eine Bestimmung von stellaren Parametern aus spektroskopischen und astrometrischen Untersuchungen. **Oben:** Durchgezogene Entwicklungswege mit Opazitäten von Rogers & Iglesias (1992) mit kühlen Opazitäten von Weiss *et.al.* (1990) und unterbrochene Wege mit Daten von Iglesias & Rogers (1996) mit Alexander & Ferguson (1994). **Unten:** Durchgezogene Wege mit Rogers & Iglesias (1992) gegen unterbrochene Wege mit Iglesias & Rogers (1996) jedoch beide mit kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994).

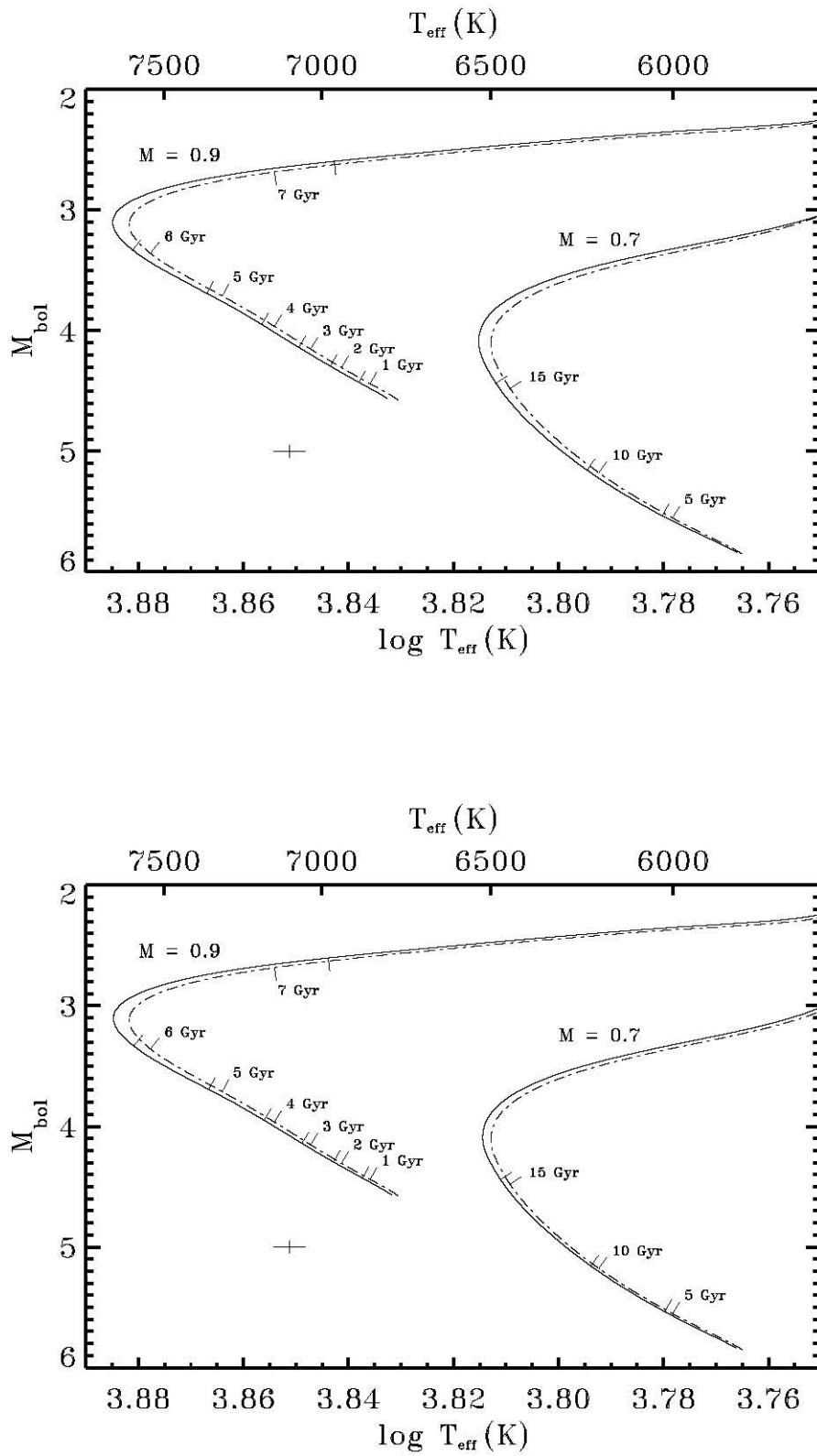


Abbildung 4.11 Entspricht Abbildung 4.10, jedoch für eine Metallhäufigkeit von $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$.

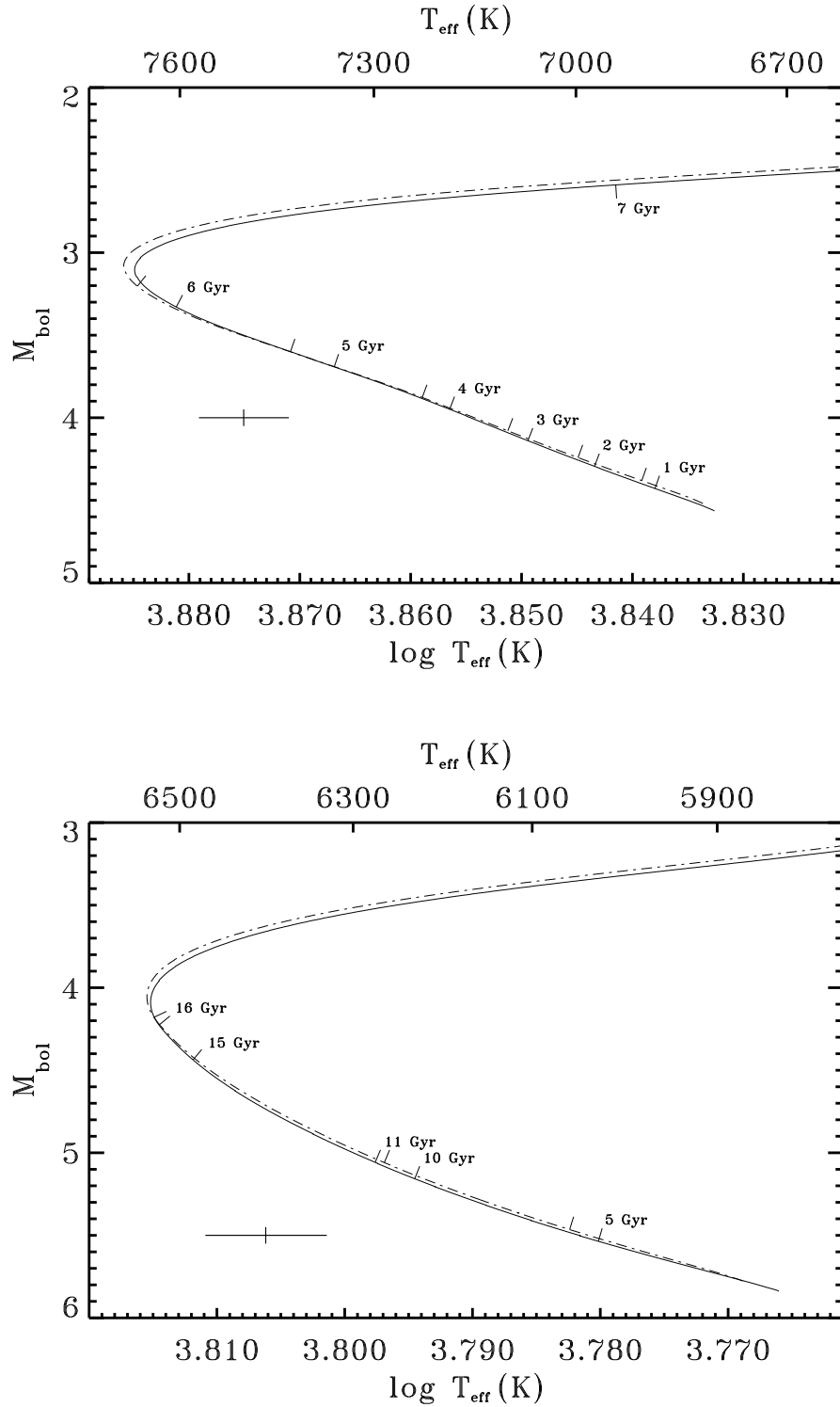


Abbildung 4.12 Entwicklungswege für $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ mit Fehlerkreuzen im Bereich der Genauigkeit für eine Bestimmung von stellaren Parametern. Durchgezogen jeweils mit OPAL-Daten von 1992 und kühlen Opazitäten nach Weiss *et.al.* (1990) und unterbrochen mit Daten von Iglesias & Rogers (1996) mit Alexander & Ferguson (1994). **Oben:** Durchgezogener Entwicklungsweg für 0.90 Sonnenmassen und unterbrochener Weg für 0.91 Sonnenmassen. Es ergibt sich eine Altersdifferenz von etwa 0.25 Milliarden Jahren. **Unten:** Durchgezogener Entwicklungsweg für 0.70 Sonnenmassen und unterbrochener Weg für 0.71 Sonnenmassen. Es ergibt sich eine Altersdifferenz von bis zu 0.9 Milliarden Jahren.

4.8.3 Äußere Randbedingung und Konvektion

Im Abschnitt 3.1 wurde bereits erwähnt, daß die Wahl der äußeren Randbedingung die Lage der Entwicklungsmodelle im Hertzsprung-Russell-Diagramm beeinflussen kann. Zwar wurde diese Problematik durch Autoren wie Vandenberg & Laskarides (1987) oder auch Chieffi & Starniero (1989) aufgegriffen, doch leider nicht ausreichend untersucht. Während die prinzipielle Vorgehensweise beim Anschluß von Modellatmosphären in dieser Arbeit bereits im Abschnitt 4.3.2 dargestellt wurde, haben beispielsweise die oben erwähnten Arbeiten die Frage nach der Anschlußtiefe mit keinem Wort diskutiert. Es bleibt dort grundsätzlich offen, wo der Anschluß der $T - \tau$ Relationen für die äußere Randbedingung erfolgte. Weiterhin wurde in einem anderen Fall der Mischungswegparameter des Sternaufbaus an dem Mischungswegparameter der Modellatmosphäre angepaßt, mit der Folge, daß sich eine Abweichung in der Effektivtemperatur des Sonnenmodells in der Größenordnung von $\Delta T_{eff} = 120K$ gegenüber der heutigen Sonne ergab. Damit sind aber die entsprechenden Entwicklungswege nicht mehr geeicht und für eine präzise Altersbestimmung schlicht unbrauchbar. Die im Folgenden präsentierten Ergebnisse einer genaueren Untersuchung des Problemkreises haben durchaus überraschende Konsequenzen für den Sternaufbau.

Gemäß dem Abschnitt 4.3.2 steht einem korrekten Anschluß von Modellatmosphären bei einer optischen Tiefe $\tau = 20$ nichts im Weg, wenn im Sternaufbau und in der Atmosphäre identische Konvektionsmodelle verwendet werden um einen *glatten* Übergang zwischen beiden Modellen zu gewährleisten. Hier sollte jedoch beachtet werden, daß die Dissertation von Klaus Fuhrmann (1993) einen Mischungswegparameter mit $\alpha = 0.5 \pm 0.3$ fordert, um eine konsistente Temperaturbestimmung anhand der spektroskopischen Linienprofile der Balmerlinien zu ermöglichen. Wie auch aus der Publikation Fuhrmann *et.al.* (1993) entnommen werden kann, testen die verschiedenen Mitglieder der Balmerserie aufgrund ihrer unterschiedlichen Entstehungstiefe den Temperaturgradienten der Sternatmosphäre. Nur bei diesem geringen Mischungswegparameter lassen sich die Profile der verschiedenen Serienmitglieder mit den beobachteten Linienprofilen zur Deckung bringen. Ein Beispiel für eine derartige Anpassung eines Linienprofils gibt Abbildung 4.13.

Ein Mischungswegparameter $\alpha \approx 0.5$ in der Formulierung nach Cox & Giuli (1968) ist jedoch im Sternaufbau nicht akzeptabel, da sich die Parameter der heutigen Sonne nicht mehr reproduzieren lassen.

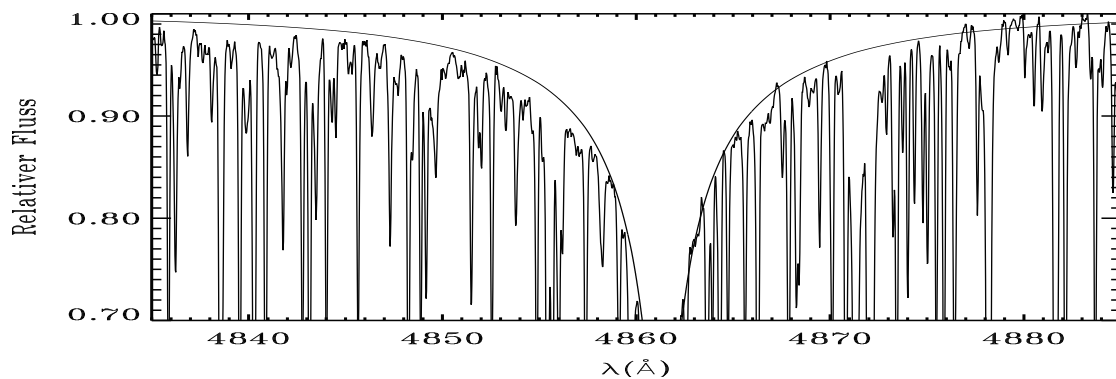


Abbildung 4.13 Sonnenspektrum mit theoretischem Linienprofil für $H\beta$ nach Fuhrmann *et.al.* (1993).

Wird die Unsicherheit von $\Delta\alpha = 0.3$ aus dem Ergebnis von Fuhrmann (1993) berücksichtigt, so zeigt die Abbildung 4.14 noch eine deutliche Diskrepanz zwischen dem Mischungswegparameter $\alpha = 0.8$ und dem des Sternaufbaus im Bereich $\alpha = 1.6$.

Dabei ist außerdem noch zu beachten, daß sich im Konvektionsmodell nach Böhm-Vitense weitere freie Parameter befinden, wie am Ende des Abschnitts 4.4.1 dargelegt. So verwendete Fuhrmann (1993) durchaus andere Parameter als es bei Cox & Giuli (1968) der Fall ist, was bisher für den Sternaufbau herangezogen wurde. Es stellt sich die Frage, ob der Unterschied der Mischungswegparameter zwischen Sternaufbau und Sternatmosphäre unter Variation der freien Parameter behoben werden kann. In der Abbildung 4.15 wird für das $H\beta$ -Profil exemplarisch die Übertragung der Ergebnisse von Fuhrmann (1993) auf die Formulierung von Cox & Giuli (1968) gezeigt. Hierbei wird deutlich, daß der Befund von Fuhrmann in der Formulierung von Cox & Giuli sogar den niedrigeren Mischungswegparameter $\alpha = 0.4$ nach sich zieht.

Insgesamt zeigte eine umfangreiche Parameterstudie, daß trotz verschiedener Wahlmöglichkeiten der diversen Parameter das Wesen der Problematik erhalten bleibt. Zwar konnte bei unterschiedlichen Werten eine Eichung an der heutigen Sonne erfolgen, jedoch gelang mit diesen Werten keine Reproduktion der Balmerlinien gemäß der Arbeiten von Fuhrmann. Umgekehrt waren die Parameter die eine entsprechende Reproduktion der Balmerlinien erlaubten nicht in der Lage die Position der heutigen Sonne im Hertzsprung-Russell-Diagramm zu erfüllen. Die diversen Parameter in der Mischungswegtheorie von Böhm-Vitense (1953) sind demnach nicht völlig unabhängig. Dieses Ergebnis deckt sich auch mit den Untersuchungen von Henyey *et.al.* (1964). Bei gegebener konvektiver Effizienz folgt auch eine entsprechend eindeutige Temperaturstruktur.

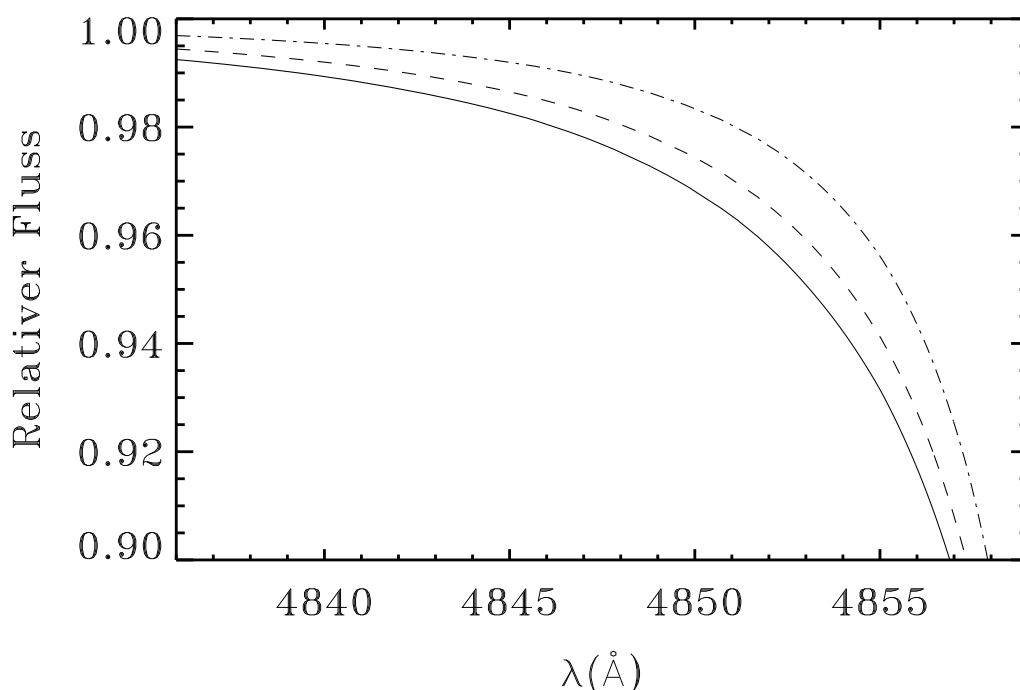


Abbildung 4.14 Blaue Flügel von theoretischen $H\beta$ -Linienprofilen. Durchgezogenes Profil mit $\alpha = 0.5$ und unterbrochenes Profil mit $\alpha = 0.80$ gemäß Fuhrmann *et.al.* (1993). Punkt-gestrichtes Profil dagegen in der Formulierung (4.39) von Cox & Giuli (1968) mit $\alpha = 1.60$.

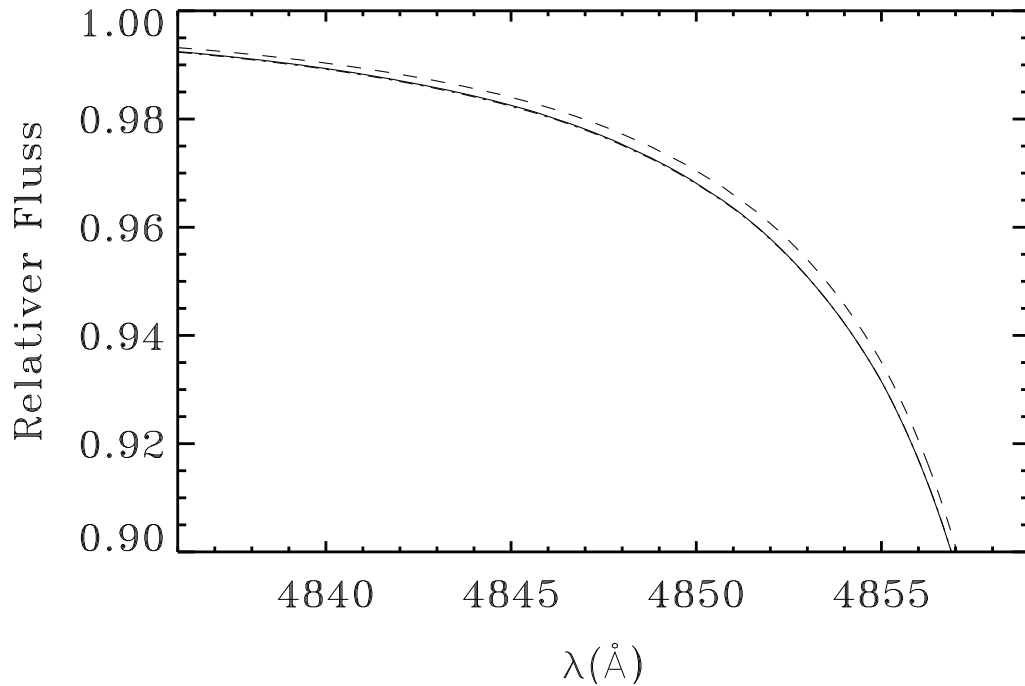


Abbildung 4.15 Blaue Flügel von theoretischen H β -Linienprofilen. Durchgezogenes Profil gemäß Fuhrmann *et.al.* (1993) mit $\alpha = 0.50$, $y = 1$, $z = 0.5$ und $f_0 = 8$. Dagegen in der Formulierung gemäß (4.39) nach Cox & Giuli unterbrochen mit $\alpha = 0.50$ und gepunktet mit $\alpha = 0.40$ (liegt auf dem durchgezogenen Linienprofil)

Das Konvektionsmodell von Böhm-Vitense läßt keine geeichte Modellierung des Sternaufbaus unter Einhaltung des spektroskopischen Befundes für die Balmerlinien von Fuhrmann zu und ist damit unzulänglich.

Als Folge wird eine andere Modellierung der Konvektion benötigt. Im Rahmen dieser Arbeit kann nun gezeigt werden, daß die Formulierung nach Canuto & Mazzitelli (1992) einen an der heutigen Sonne kalibrierten Sternaufbau und gleichzeitig zufriedenstellende Linienprofile der Balmerlinien ermöglicht (s. auch Bernkopf (1998)). Wird im Standardmodell der Sonne die Konvektionstheorie von Böhm-Vitense durch Canuto & Mazzitelli ersetzt, so folgt ein Mischungswegparameter von $\alpha_{cm} = 0.811$, um einer Eichung an der heutigen Sonne zu genügen. Abbildung 4.16 oben zeigt die vernachlässigbare Abweichung des entsprechenden theoretischen Linienprofils von dem nach Fuhrmann (1993) geforderten Linienprofil. Mit einem Mischungswegparameter von $\alpha_{cm} = 0.90$ wäre die Bedingung exakt erfüllt. Offenbar erfolgt selbst bei mäßiger Variation des Mischungswegparameters bei Canuto & Mazzitelli keine herausragende Änderung für das Balmerlinienprofil. Vielmehr ergibt sich allgemein eine geeignetere Temperaturstruktur für die gleichzeitigen Anforderungen aus Sternaufbau und dem Profilverlauf der Balmerlinien. Dieser Sachverhalt tritt in Abbildung 4.16 unten deutlich hervor. Während im Bereich des Sternaufbaus ($\alpha = 1.6$) ein flacher Temperaturgradient benötigt wird, ist für die Balmerlinien in geringer optischer Tiefe ein steilerer Temperaturgradient erforderlich ($\alpha = 0.50$).

Das Konvektionsmodell von Canuto & Mazzitelli erfüllt gleichzeitig die Eichbedingungen im Sternaufbau und den spektroskopischen Befund für die Balmerlinien von Fuhrmann. Es ist daher dem Konvektionsmodell von Böhm-Vitense vorzuziehen.

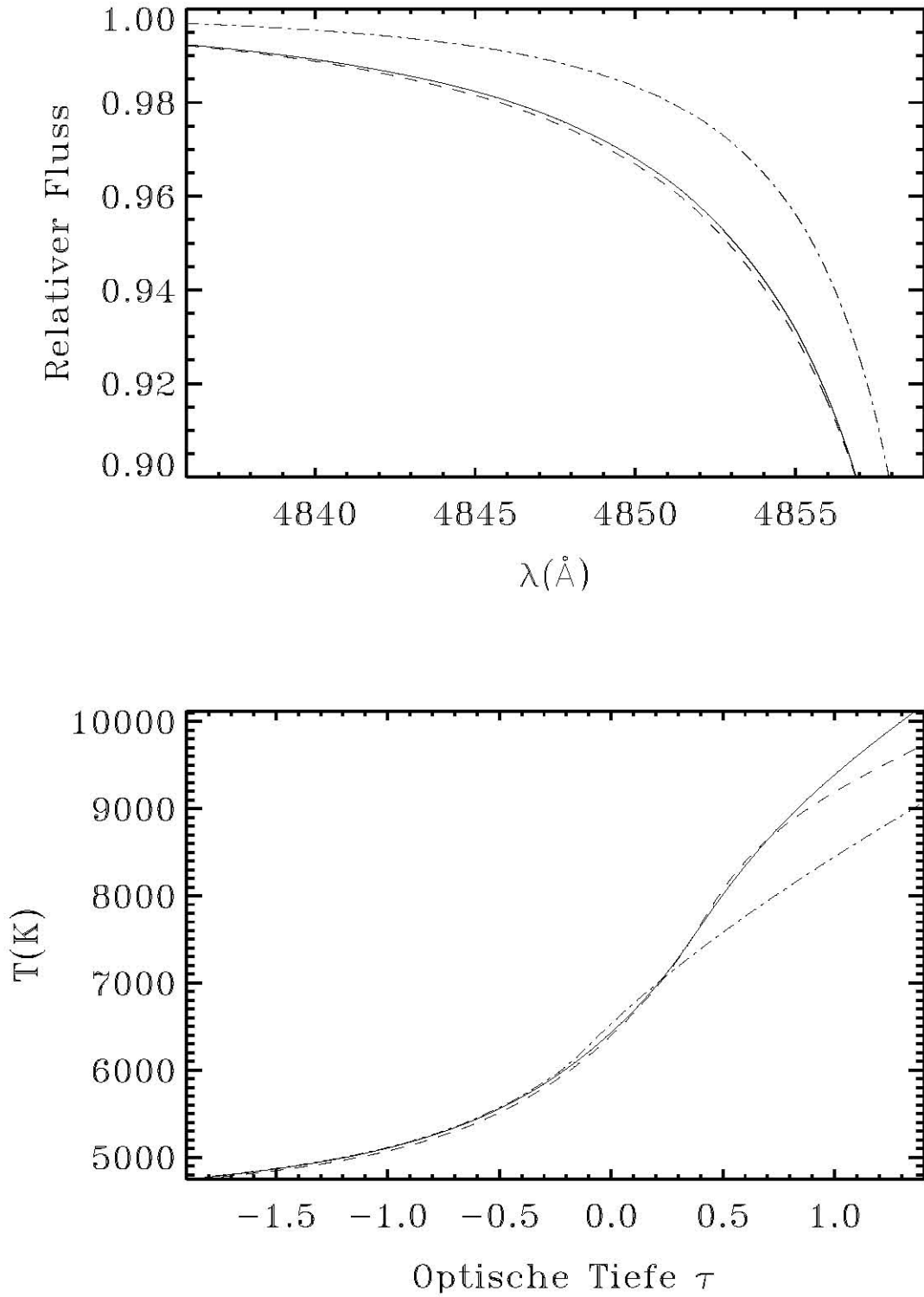


Abbildung 4.16 Vergleich unterschiedlicher Konvektionsmodelle. Die durchgezogene Kurve erfüllt die Randbedingung von Fuhrmann *et.al.* (1993) mit $\alpha = 0.50$, $y = 1$, $z = 0.5$ und $f_0 = 8$. Dagegen punkt-gestrichelt das Modell in der Formulierung gemäß (4.39) nach Cox & Giuli mit $\alpha = 1.60$ und schließlich unterbrochen das Modell nach Canuto & Mazzitelli (1992) mit $\alpha_{cm} = 0.811$. **Oben:** Blaue Flügel der theoretischen H β -Linienprofile. **Unten:** Temperaturschichtungen der verschiedenen Konvektionsmodelle.

Die Abbildung 4.17 zeigt, daß sich aus den unterschiedlichen Konvektionsmodellen vor dem Riesenast geringfügige Altersdifferenzen ergeben. So wird in der Turn-off-Region mit der Konvektion nach Canuto & Mazzitelli das Alter bei einem Stern einer Sonnenmasse und solarer chemischer Häufigkeiten um etwa 500 Millionen Jahre größer. Dagegen ist bei einem 0.8 Sonnenmassen-Stern das Alter um 1.7 Milliarden Jahre jünger. Bei geringer Metallizität tritt nur für einen Stern von 0.7 Sonnenmassen ein um 300 Millionen Jahre höheres Alter auf. Für 0.9 und 0.8 Sonnenmassen ergaben sich schließlich keine Altersdifferenzen (vergleiche auch Tabelle 4.3).

Oberflächlich betrachtet könnten nun die Auswirkungen einer detaillierten äußeren Randbedingung mit Modellatmosphären gegenüber der im Abschnitt 4.3.1 geschilderten Diffusionsnäherung untersucht werden. Entwicklungswege mit dem Konvektionsmodell nach Canuto & Mazzitelli und den restlichen Eingangsbedingungen analog zum Referenzmodell (vgl. Abschnitt 4.1) könnten gegen Entwicklungswege unter Verwendung von Modellatmosphären angetragen werden. Aufgrund der dann konsistenten Behandlung der Konvektion sollte sich der reine Effekt aus der Randbedingung zeigen. Dies stimmt jedoch nicht !

Bei der Berechnung der Sternatmosphären werden für die Opazitätsquellen ODF-Tabellen von Kurucz (1995) herangezogen, während das Referenzmodell die Opazitäten von Weiss *et.al.* (1990) verwendet. Die unterschiedlichen Opazitäten können jedoch Auswirkungen auf die Lage der Entwicklungswege im Hertzsprung-Russell-Diagramm haben. Zur Trennung der physikalischen Auswirkungen von Opazitäten und äußerer Randbedingung wurde das Modellatmosphärenprogramm modifiziert und aus den ODF-Tabellen von Kurucz eine Tabelle für graue Opazitäten für den Sternaufbau errechnet. Dabei zeigten Vergleichsrechnungen, daß die auf den ODF-Tabellen von Kurucz basierenden grauen Opazitäten mit den kühlen Opazitätsdaten von Alexander & Ferguson (1994) übereinstimmen. Die Opazitätsdaten von Kurucz gelten aufgrund ihres großen Umfangs an berücksichtigten Opazitätsquellen als relativ zuverlässig.

Als Konsequenz sollten die kühlen Opazitäten von Weiss *et.al.* (1990) durch die Opazitätstabellen von Alexander & Ferguson (1994) ersetzt werden.

An dieser Stelle müsste erneut das Verhalten der Entwicklungswege beim Übergang von den kühlen Opazitäten nach Weiss *et.al.* (1990) zu den kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) gezeigt werden, wobei nun das Konvektionsmodell von Canuto & Mazzitelli (1992) in beiden Fällen verwendet werden muß. Anhand dieses Beispiels lassen sich die Vorzüge der *differentiellen* Analyse und Entwicklungsrechnung zeigen. Aufgrund der Eichung des Sternaufbaus an der Position unserer heutigen Sonne im Hertzsprung-Russell-Diagramm, spielt die Konvektion für den Vergleich der unterschiedlichen kühlen Opazitäten nur eine sekundäre Rolle. Die entsprechenden Diagramme unterscheiden sich von den Abbildungen 4.7 bis 4.9 nicht erkennbar. Exemplarisch soll dieser Sachverhalt mit Hilfe von Abbildung 4.18 illustriert werden.

Im Idealfall sollten sich die im Diagramm besprochenen Effektivtemperaturdifferenzen zwischen dem Konvektionsmodell von Canuto & Mazzitelli und dem Modell von Böhm-Vitense gegenseitig aufheben. Dies würde bedeuten, daß die spezielle Wahl der Konvektion in erster Linie keinen Einfluß auf die Auswirkungen der unterschiedlichen kühlen Opazitäten besitzt. Die in Abbildung 4.18 dargestellte Abweichung von maximal 7 Kelvin kann schon aufgrund der Problematik vernachlässigt werden, daß sich die Sternaufbaumodelle nur sehr aufwendig vollkommen exakt eichen lassen.

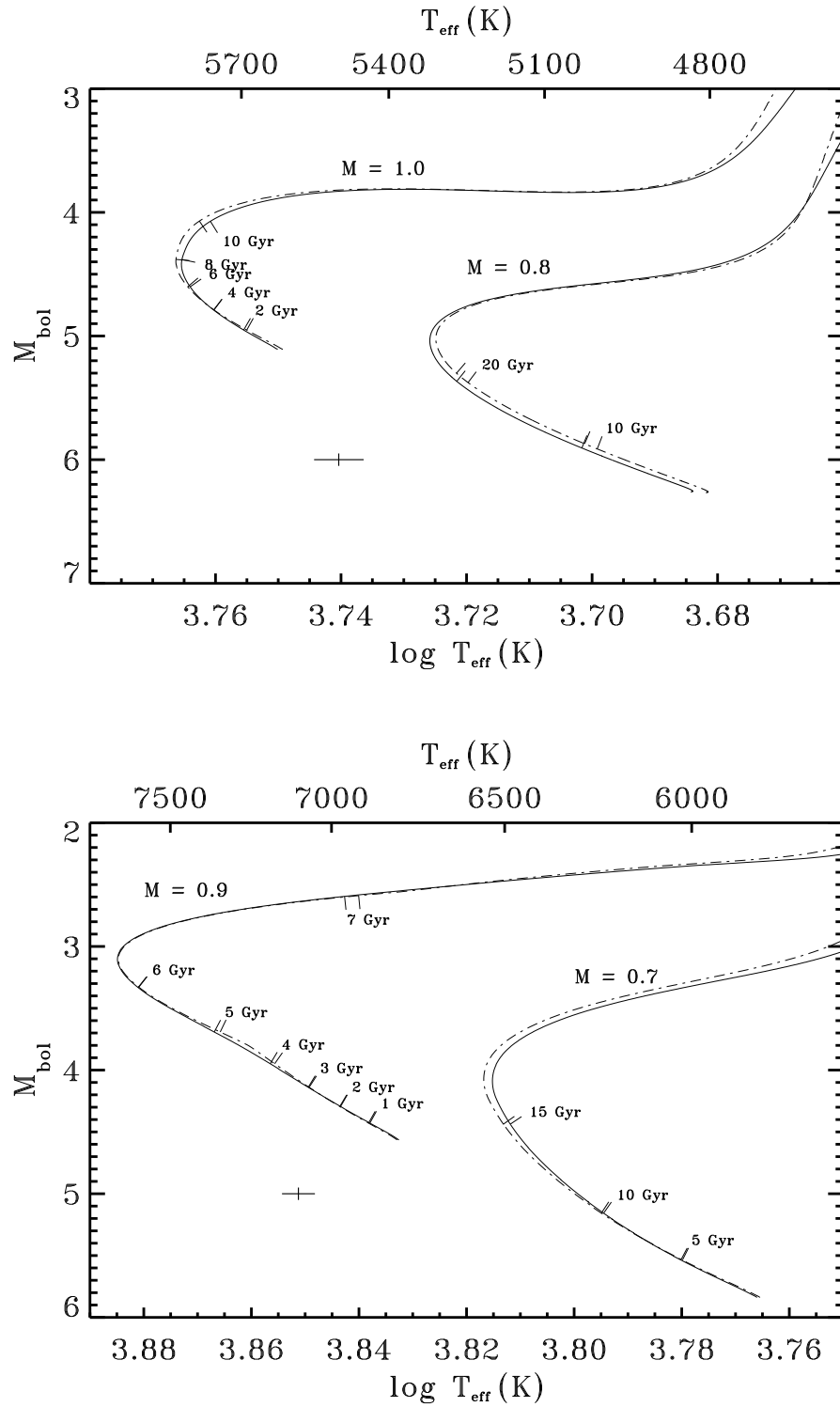


Abbildung 4.17 Entwicklungswege mit Fehlerkreuzen im Genauigkeitsbereich für eine Bestimmung von stellaren Parametern. Durchgezogene Entwicklungswege (Referenzmodelle) jeweils mit OPAL-Daten von 1992, kühlen Opazitäten nach Weiss *et.al.* (1990) und Konvektionsmodell von Böhm-Vitense (1953) in der Formulierung von Cox & Giuli (1968) und $\alpha = 1.587$. Unterbrochene Entwicklungswege dagegen mit dem Konvektionsmodell nach Canuto & Mazzitelli (1992) mit $\alpha_{cm} = 0.811$. **Oben:** Entwicklungswege für 1.00 und 0.80 Sonnenmassen bei solarer Metallhäufigkeit. **Unten:** Entwicklungswege für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen bei $[Fe/H] = -2.0$.

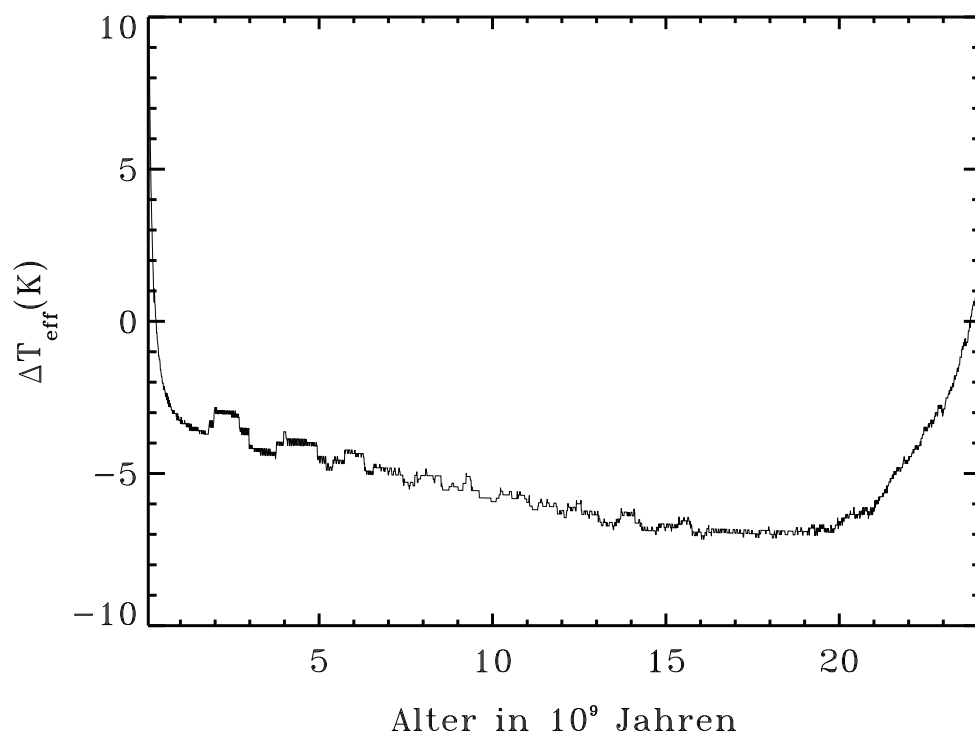


Abbildung 4.18 Differentieller Temperaturunterschied für einen Stern mit 0.80 Sonnenmassen und einer Metallizität von $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ gegen Sternalter. Es wurden zunächst für geeichte Sternmodelle gleichen Alters mit Konvektion nach Böhm-Vitense (1953) Effektivtemperaturdifferenzen bestimmt, wobei die Effektivtemperaturen der Modelle mit kühlen Opazitäten nach Weiss *et.al.* (1990) von den Effektivtemperaturen mit kühlen Opazitäten nach Alexander & Ferguson (1994) abgezogen wurden. Danach wurde dieselbe Differenz der Effektivtemperaturen unter Verwendung des Konvektionsmodells von Canuto & Mazzitelli (1992) berechnet. Abschließend wurde die zweite von der ersten Differenz abgezogen und das Ergebnis gegen das Sternalter angetragen.

Bei anderen Massen und chemischen Häufigkeiten ergaben sich sogar nur Differenzen unter 5 Kelvin für den Effektivtemperaturunterschied. Identisch geringfügig verhält sich auch der Leuchtkraftunterschied. Damit muß der Übergang zwischen den einzelnen Opazitäten für das Konvektionsmodell von Canuto & Mazzitelli nicht erneut gezeigt werden, sondern es können die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts verwendet werden.

Schließlich können jetzt die von Opazitätseffekten bereinigten Auswirkungen einer geänderten äußeren Randbedingung studiert werden. Abbildung 4.19 zeigt, daß die Vermutung einiger Autoren (s. VandenBerg (1991)), der Anschluß von Modellatmosphären als äußere Randbedingung sei von größerer Bedeutung für die Altersbestimmung, nicht bestätigt werden kann. Bei allen Modellrechnungen ergaben sich maximale Unterschiede in der Effektivtemperatur von 25 Kelvin. Größere Auswirkungen bei anderen Autoren sind sehr wahrscheinlich auf eine unsaubere Vermengung verschiedener Effekte (Opazitäten, keine Eichung der Modelle an der heutigen Sonne und dergleichen) zurückzuführen. Für die Altersbestimmung entstehen aus der geänderten äußeren Randbedingung entsprechend geringe Altersänderungen. Im Fall von solarer Häufigkeit und einer Sonnenmasse ist kein Unterschied feststellbar, während sich bei 0.8 Sonnenmassen um etwa 100 Millionen Jahre höhere Sternalter ergeben. Dies fällt jedoch in Hinblick auf eine spektroskopisch erzielbare Altersgenauigkeit von circa 6 Milliarden Jahren nicht mehr ins Gewicht.

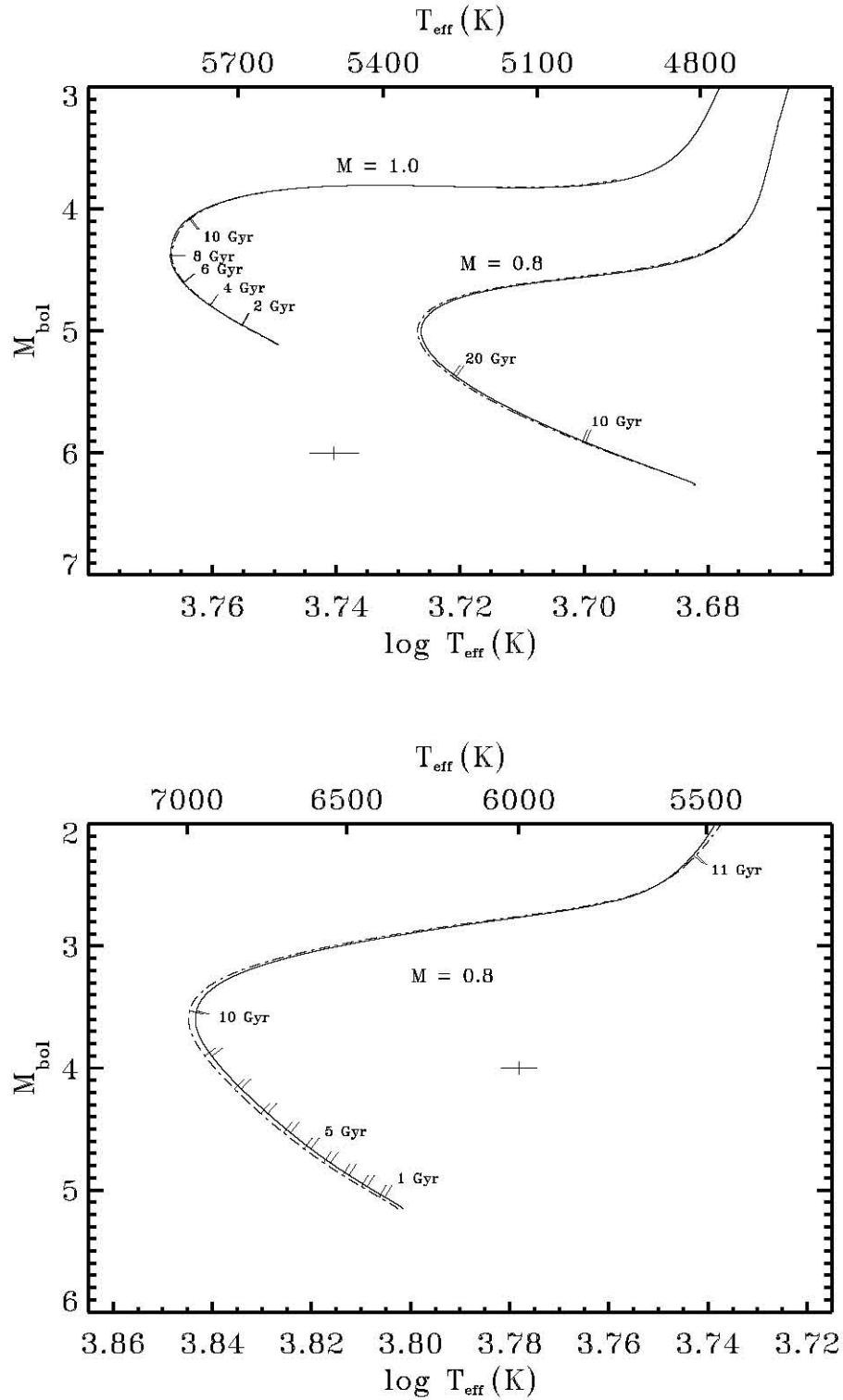


Abbildung 4.19 Entwicklungswege mit Fehlerkreuzen im Genauigkeitsbereich für eine stellaren Parameterbestimmung. Durchgezogene Wege mit $\alpha_{cm} = 0.834$ und OPAL-Daten von 1992, sowie kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) und der Diffusionsnäherung als äußere Randbedingung. Unterbrochene Wege dagegen mit $\alpha_{cm} = 0.828$ und Modellatmosphären als äußere Randbedingung. In beiden Fällen betrug der Heliummassenbruchteil 0.2730. **Oben:** Entwicklungswege für 1.00 und 0.80 Sonnenmassen solarer Metallizität. **Unten:** Entwicklungsweg für 0.80 Sonnenmassen bei $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$.

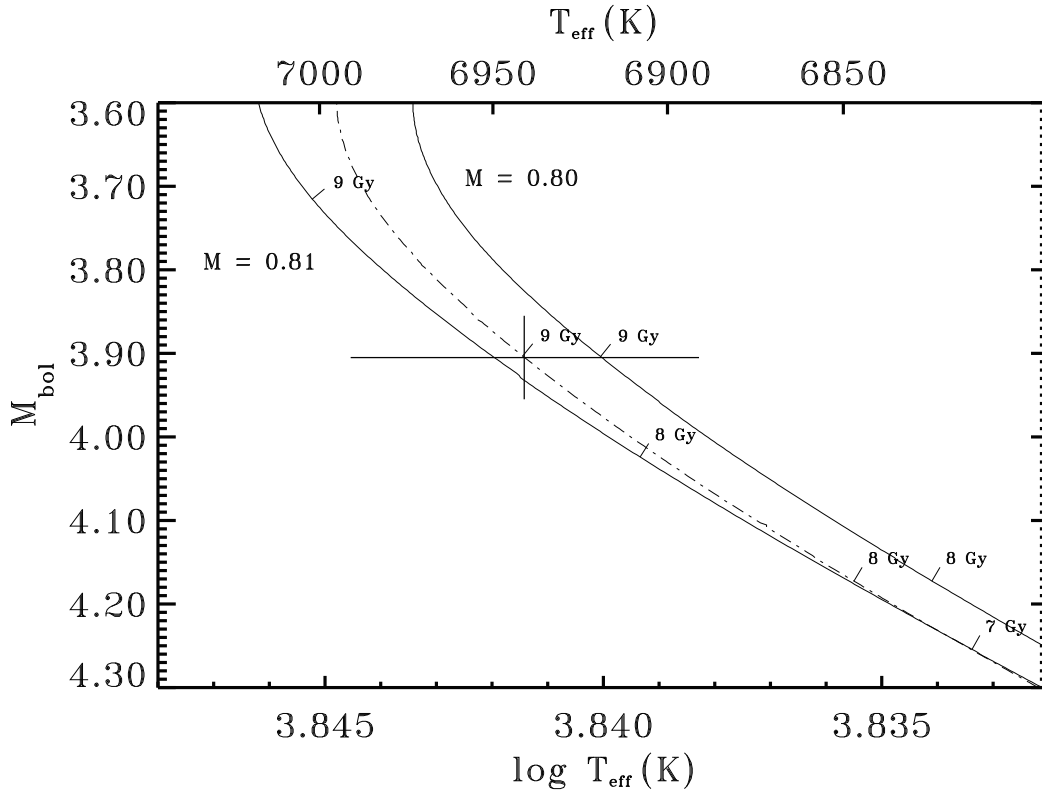


Abbildung 4.20 Entwicklungswege für eine Metallizität von $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ analog zur Abbildung 4.19. Zusätzlich wurde noch ein Entwicklungswege für 0.81 Sonnenmassen mit Diffusionsnäherung als äußere Randbedingung berechnet. Damit ergeben sich für Entwicklungswege mit Modellatmosphären am äußeren Rand etwa 0.6 Milliarden höhere Alter als mit Diffusionsnäherung. Das Kreuz entspricht wieder dem Genauigkeitsbereich der spektroskopischen Parameter.

Bei metallarmen Sternen ergaben die Entwicklungswege mit Modellatmosphären als äußere Randbedingung 20-25 Kelvin höhere Effektivtemperaturen gegenüber den Wegen mit einer Diffusionsnäherung. Aus Abbildung 4.20 wird ersichtlich, daß sich dieser Sachverhalt bei einem 0.8 Sonnenmassen Stern mit etwa 700 Millionen Jahre älteren Angaben für das Sternalter auswirkt. Die Altersdifferenz wird bei Sternen höherer Masse geringer und bleibt bei geringeren Massen in dieser Größenordnung (vergleiche mit Tabelle 4.3). Der Fehler aufgrund der spektroskopischen Beobachtungsgenauigkeit ist in allen berechneten Fällen deutlich größer. Zwischen Turn-off und Fuß des Riesenastes lassen sich die Sternalter zwar prinzipiell mit höherer Genauigkeit bestimmen, jedoch zeigen die Entwicklungswege von Abbildung 4.19, daß in dieser Region die Entwicklungswege unterschiedlicher äußerer Randbedingung zur Deckung kommen. Außerdem weisen sie dort identische Altersangaben auf, so daß folgende abschließende Aussage getroffen werden kann:

Wird als äußere Randbedingung anstelle einer Diffusionsnäherung bis zur optischen Tiefe $\tau = 2/3$ unter Verwendung des Eddingtonschen Temperaturgesetzes ein Modellatmosphärentgitter benutzt, so ergeben sich im Extremfall um etwa 0.8 Milliarden Jahre höhere Sternalter. Verglichen mit der Beobachtungsgenauigkeit kann die auftretende Altersdifferenz jedoch vernachlässigt werden.

4.8.4 Zustandsgleichung

Die im Folgenden untersuchte Zustandsgleichung von Rogers, Swenson & Iglesias (1996), steht leider nur für einen begrenzten Temperatur- und Druckbereich zur Verfügung. Die Beschränkung der tabellierten Werte führt dazu, daß im Hertsprung-Russell-Diagramm erst ab bolometrischen Helligkeiten $M_{bol} < 5.5$ der Sternaufbau mittels der Tabellen berechenbar wird. Außerhalb dieses Bereichs muß der Sternaufbau von vereinzelt Tiefenregionen mittels der bisherigen Standardzustandsgleichung gelöst werden. Nachdem sich die ergebenden Dichten aus den Tabellen von den Werten der Standardzustandsgleichung oftmals unterscheiden, führt der Übergang zwischen den beiden Zustandsgleichungen inmitten der stellaren Struktur zu pathologischen Entwicklungswegen. Dies wird in Abbildung 4.21 im Entwicklungsweg für den 0.85 Sonnenmassen Stern bis zu einem Alter von etwa 10 Milliarden Jahren deutlich erkennbar. Die aus derartigen Entwicklungsrechnungen resultierenden Alter sind natürlich mit Unsicherheiten belastet, da die stellare Struktur nicht über den gesamten Entwicklungsverlauf konsistent bestimmt wurde. Ebenso verliert der differenzielle Ansatz bei diesen Modellen seine Gültigkeit, nachdem Mischungsweglänge und Heliumhäufigkeit an einem Sonnenmodell geeicht wurden, bei dem die OPAL-Zustandsgleichung für die gesamte Sternentwicklung zur Verfügung stand. Weiterhin stehen auch im Bereich ab dem unteren Riesenast keine tabellierten Dichtewerte für den kompletten Stern zur Verfügung. Dies macht sich nur am inneren und äußeren Rand des Sternmodells bemerkbar und ermöglicht somit einen glatten Übergang zwischen den verschiedenen Dichtewerten. Zwar sind für diese Übergänge die Entwicklungswege weniger pathologisch, doch verliert auch dann die Altersbestimmung ihre strenge Aussagekraft.

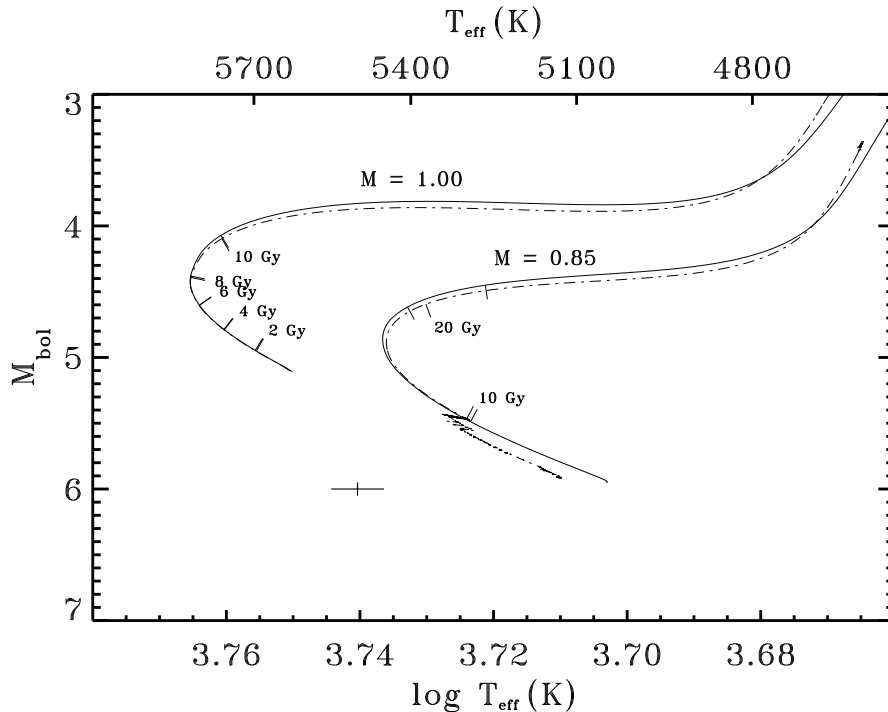


Abbildung 4.21 Entwicklungswege für solare Metallizität für 1.0 und 0.85 Sonnenmassen. Die Referenzmodelle sind mit durchgezogenen Wegen dargestellt, während die unterbrochenen Entwicklungswege mit der Zustandsgleichung von Rogers, Swenson & Iglesias (1996) berechnet wurden. Deutlich tritt der im Text geschilderte pathologische Entwicklungsverlauf für $M_{bol} > 5.5$ hervor.

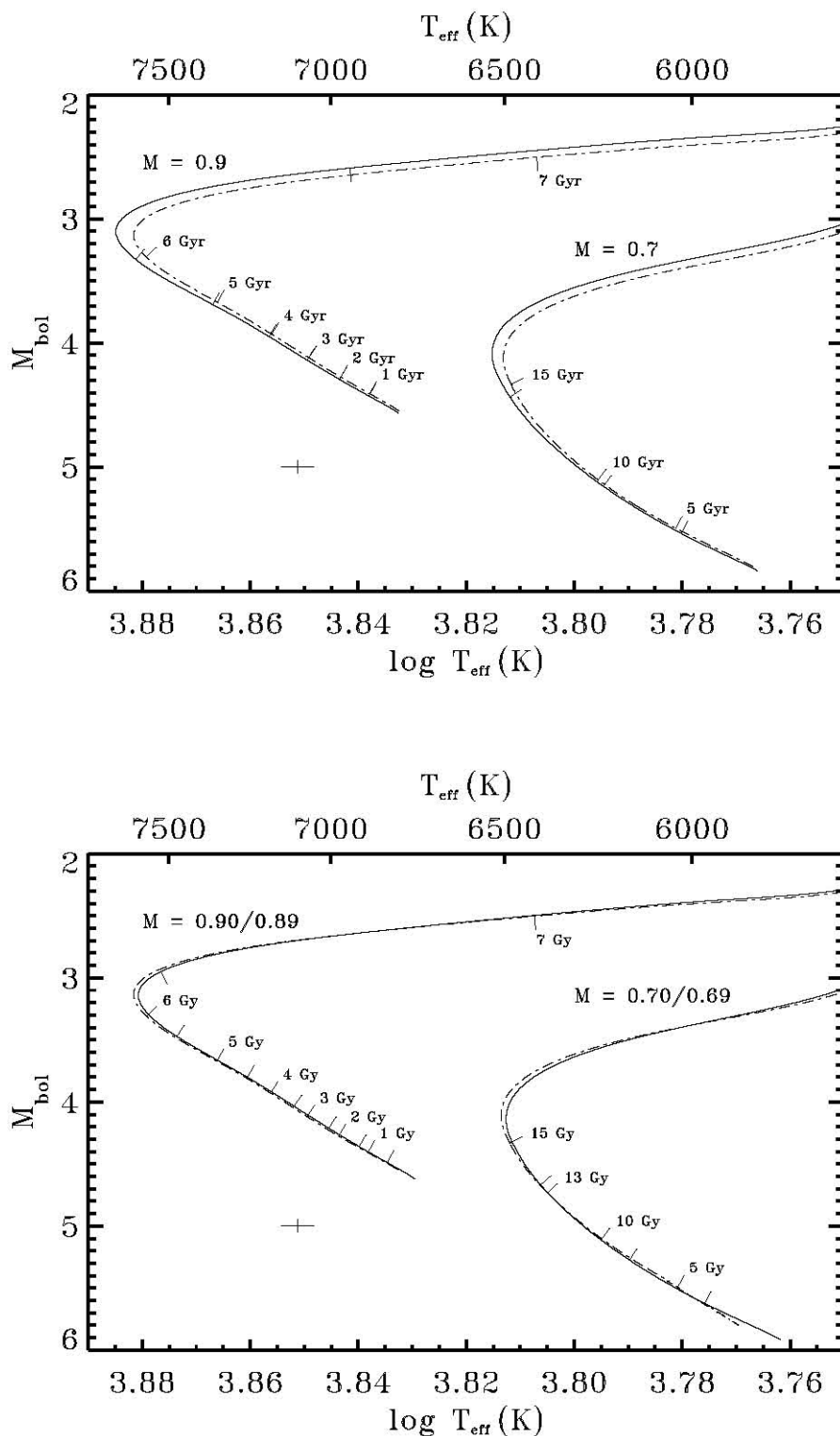


Abbildung 4.22 Entwicklungswege mit Fehlerkreuzen im Genauigkeitsbereich für eine stellaren Parameterbestimmung für $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$. Die durchgezogenen Wege entsprechen den Referenzmodellen, während die unterbrochenen Entwicklungswege mit geänderter Zustandsgleichung berechnet wurden. **Oben:** Entwicklungswege für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen. **Unten:** Entwicklungswege mit geänderter Zustandsgleichung wie oben, jedoch die Referenzmodelle für 0.89 und 0.69 Sonnenmassen.

Trotz aller Einschränkungen läßt insbesondere die exemplarische Gegenüberstellung der Entwicklungswege für $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ in Abbildung 4.22 oben eine etwas größere Abweichung für die Sternalter erwarten, als es bei den unterschiedlichen Opazitätstabellen der Fall war. Der Entwicklungsweg des 0.7 Sonnenmassen Sterns weist bei geänderter Zustandsgleichung in der Nähe des Turn-off bereits ein 0.3 Milliarden Jahre geringeres Alter auf, obwohl noch keine Anpassung an die unterschiedliche Effektivtemperatur erfolgte. Werden dagegen übereinanderliegende Entwicklungswege betrachtet, so zeigt Abbildung 4.22 unten den entsprechenden Sachverhalt. Gegenüber den Wegen mit der OPAL-Zustandsgleichung wurden die Modellfolgen mit alter Zustandsgleichung um 0.01 Sonnenmassen verringert. Im Gegensatz zur bisherigen Altersreduzierung wird jetzt bei einem Stern von 0.7 Sonnenmassen das Alter um bis zu 1.7 Milliarden Jahre höher und bei 0.9 Sonnenmassen immerhin noch bis zu 0.4 Milliarden Jahre mehr. Verglichen mit den jeweils erreichbaren Genauigkeiten von etwa 3 Milliarden und knapp 1 Milliarde Jahren sind die unterschiedlichen Zustandsgleichungen nicht mehr ganz bedeutungslos.

Auffällig ist noch, daß die Modelle mit geänderter Zustandsgleichung durchwegs eine geringere Effektivtemperatur aufweisen. Dies kann mit der höheren Teilchenzahl in der OPAL-Zustandsgleichung erklärt werden, die sich dort aus der Berücksichtigung weiterer Ionisationsmechanismen ergibt. Damit tritt eine Erhöhung der Opazität auf, welche eine Verringerung der Effektivtemperatur und eine Vergrößerung des Sternradius nach sich zieht. Dieselbe Abhängigkeit von der Teilchenzahl erklärt nebenbei auch die unterschiedliche Lage der Entwicklungswege im HRD von solaren Häufigkeiten gegenüber $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$.

Es stellt sich die Frage, ob die OPAL-Zustandsgleichung gegenüber der bisherigen Zustandsgleichung bevorzugt werden sollte. Aus den Abbildungen 4.21 und 4.22 ergibt sich zunächst kein offensichtliches Argument für eine Entscheidung. Anfang der 60er Jahre entdeckten jedoch unter anderen Leighton, Noyes & Simon (1962) periodische Schwingungen der Sonnenoberfläche, die inzwischen als *Fünf-Minuten Oszillationen der Sonne* bekannt geworden sind. Die *Helioseismologie*, die sich mit den verschiedenen Schwingungszuständen der Sonne beschäftigt, ist inzwischen in der Lage das beobachtbare Frequenzspektrum mehr oder weniger gut zu reproduzieren. Entscheidend hierfür ist die Schallgeschwindigkeit innerhalb der Sonne, die sich auch aus Sonnenmodellen berechnen läßt. Es ist offensichtlich, daß eine geänderte Zustandsgleichung zu geänderten Schallgeschwindigkeiten führt. Damit ergeben sich auch Auswirkungen auf ein theoretisches Frequenzspektrum der solaren Oberflächenschwingungen. Entsprechend ist durch die in den letzten Jahren steigende Genauigkeit helioseismologischer Untersuchungen eine Möglichkeit gegeben, die stellare Struktur der Sonne und damit auch die gestellte Frage nach der Zustandsgleichung zu untersuchen. Christensen-Dalsgaard & Däppen (1992) legten in einem ausführlichen Review-Artikel dar, daß beim damaligen Stand der Helioseismologie nicht deutlich zwischen den Zustandsgleichungen von Mihalas, Däppen & Hummer (1988), Rogers, Swenson & Iglesias (1996) oder der korrigierten Fassung von Eggleton, Faulkner & Flannery (1973) unterschieden werden kann. Die einfachen Versionen einer Saha-Boltzmann-Statistik sind jedoch völlig unausreichend. Damit läßt sich zusammenfassend feststellen:

Die Auswirkungen der OPAL-Zustandsgleichung sowohl auf die Modellphysik, als auch auf die Altersbestimmung, liegt im Bereich der untersuchbaren Genauigkeit von Spektroskopie und Helioseismologie. Die OPAL-Zustandsgleichung ist eine der durch die Helioseismologie bevorzugten Beschreibungen und führt zu leicht geänderten Sternaltern. Der beschränkte Parameterraum der OPAL-Zustandstabellen stellt jedoch eine gewisse Problematik dar, so daß eine Untersuchung anderer Zustandsgleichungen durchaus wünschenswert ist.

4.8.5 Chemische Häufigkeiten

Bisher wurden nur modellphysikalische Aspekte für die Ermittlung einer erreichbaren Altersgenauigkeit in der Sternentwicklung herangezogen. Neben den Unsicherheiten in Effektivtemperatur und bolometrischer Helligkeit, deren Auswirkungen auf das Sternalter unmittelbar im Hertzsprung-Russell-Diagramm ablesbar sind, spielen jedoch die chemischen Häufigkeiten eine oftmals vernachlässigte Rolle. Daher wird an dieser Stelle einmal etwas genauer der Einfluß von chemischen Häufigkeiten auf die Altersbestimmung beleuchtet.

4.8.5.1 Eichungenauigkeiten

Im Abschnitt 4.5 wurde dargelegt, daß sich bei der Eichung an der heutigen Sonne verschiedene Möglichkeiten zur Ermittlung der Massenbruchteile von Wasserstoff, Helium und den Metallen ergeben. Zur Abschätzung der Auswirkungen eines geänderten Eichverfahrens auf die ermittelbaren Sternalter wurde ein Satz unterschiedlich kalibrierter Entwicklungswege erstellt. Das in Gleichung (4.59) als Randbedingung festgehaltene Massenverhältnis von Metallen zu Wasserstoff ist dabei nicht mehr beibehalten, sondern die zur Eichung notwendige Variation des Massenbruchteils von Helium wird ausschließlich über eine Änderung des Massenbruchteils von Wasserstoff erreicht. Als Eichwerte aus der Anpassung an der heutigen Sonne ergaben sich gegenüber (4.1):

$$\begin{aligned} X &= 0.71026 \\ Y &= 0.27230 \\ Z &= 0.01744 \\ \alpha &= 1.587 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Die aus den neuen Eichparametern resultierenden Entwicklungswege wiesen für solare Häufigkeiten keine merklichen Unterschiede auf und lagen bei metallarmen Sternen unter 200 Millionen Jahren (vgl. Abbildung 4.23 oben).

Werden anstelle der spektroskopischen chemischen Häufigkeiten nach Tabelle 3.1 die Häufigkeiten von Anders & Grevesse (1989) laut Tabelle 4.1 zur Bestimmung der Massenbruchteile herangezogen, so ergeben sich als Eichparameter für die Entwicklungsmodelle:

$$\begin{aligned} X &= 0.70235 \\ Y &= 0.27890 \\ Z &= 0.01875 \\ \alpha &= 1.607 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Bei solaren Häufigkeiten treten aufgrund der Eichung an der heutigen Sonne keine Unterschiede auf. Für metallarme Sterne zeigt die Abbildung 4.23 unten eine Veränderung in der Lage der Entwicklungswege. Durch Erhöhung der Massen für die Referenzmodelle um jeweils 0.01 Sonnenmassen lassen sich die Entwicklungswege zur Deckung bringen. Ein 0.90 Sonnenmassen Modell mit Häufigkeiten nach Anders & Grevesse (1989) liefert dann um knapp 100 Millionen Jahre höhere Alter als ein 0.91 Sonnenmassen Referenzmodell. Für 0.70 Sonnenmassen mit solaren Häufigkeiten nach Anders & Grevesse (1989) erhält man 400 Millionen Jahre ältere Sterne gegenüber dem 0.71 Sonnenmassen Referenzmodell.

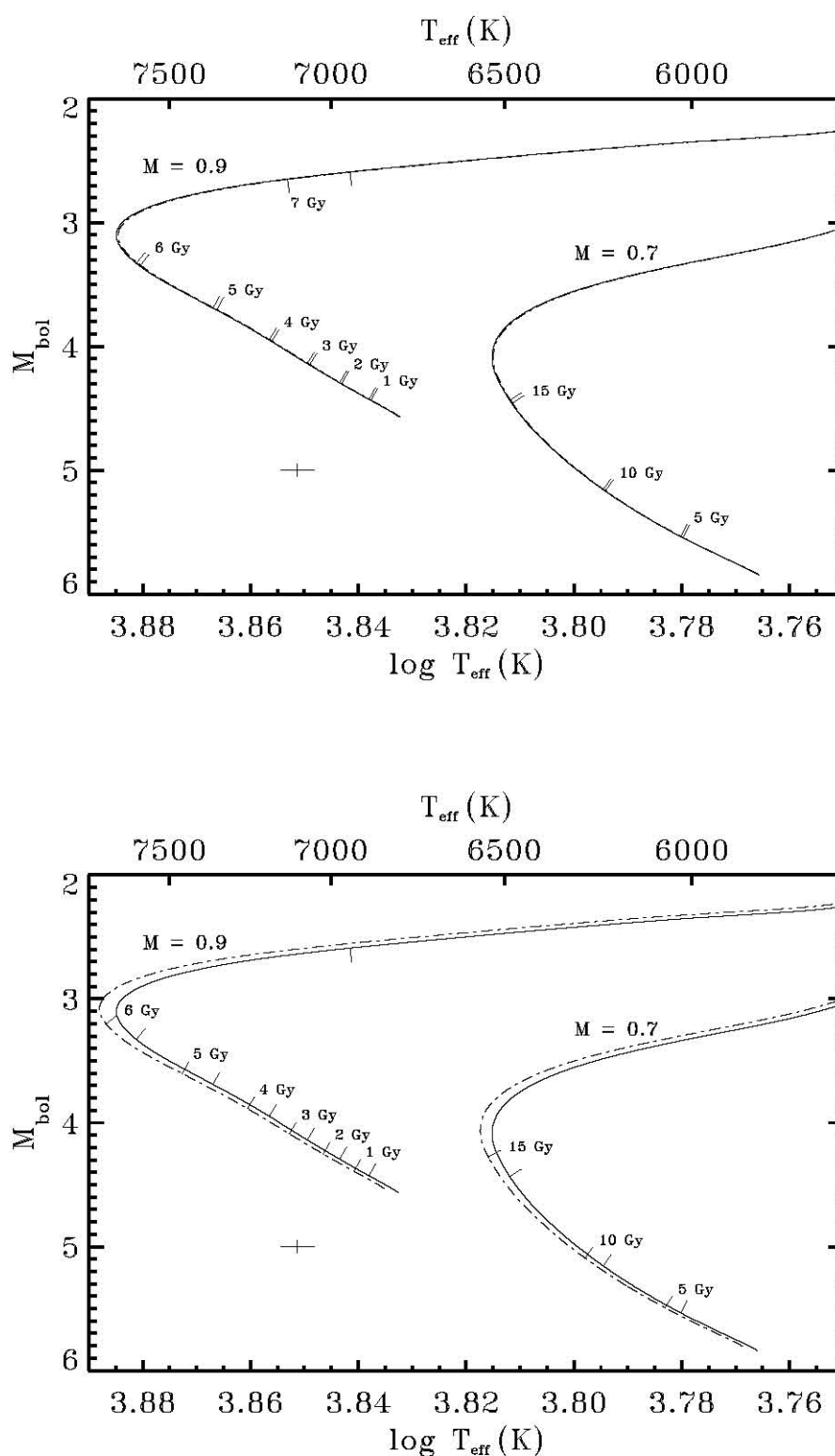


Abbildung 4.23 Entwicklungswege für Metallizität $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen. Die Referenzmodelle sind mit durchgezogenen Wegen dargestellt. Die unterbrochenen Entwicklungswege sind: **Oben:** mit geänderten Eichverfahren für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen. **Unten:** mit Häufigkeiten nach Anders & Grevesse (1989).

Entsprechend würden sich aus einer Analyse der Entwicklungsstadien etwas geänderte Sternmassen ergeben, doch nur geringe Veränderungen in den Sternaltern. Mit den Ergebnissen der noch folgenden Abschnitte kann gezeigt werden, daß die Verschiebung der Entwicklungswege weniger auf die leichte Erhöhung des Massenbruchteils für Metalle zurückführbar ist, als vielmehr auf den etwas höheren Heliumanteil. Zusammenfassend kann festgehalten werden:

Die Auswirkungen des geänderten Eichverfahrens sind vernachlässigbar, ebenso wie eine geänderte Wahl der spektroskopischen Häufigkeiten in der Sonne. Es wird aber deutlich, daß ein konsistenter Satz von spektroskopischen Häufigkeiten zur Berechnung von Massenbruchteilen beibehalten werden muß.

4.8.5.2 Spektroskopische Häufigkeitsfehler

Im Gegensatz zum vorhergehenden Abschnitt sind für eine absolute Bestimmung von Sternaltern die Fehler in den spektroskopisch ermittelten Elementhäufigkeiten keineswegs vernachlässigbar. Zur Illustration wurden für einen Satz von Entwicklungsmodellen die spektroskopischen Metallhäufigkeiten (also für alle Elemente mit Ausnahme von Wasserstoff und Helium) um 0.05 dex und um 0.10 dex erhöht. Anschließend erfolgte ein Vergleich von Sternaltern mit den Referenzmodellen. Wie Abbildung 4.24 oben zeigt, ergeben sich bereits bei 0.05 dex höherer Metallizität gegenüber solaren Elementhäufigkeiten deutliche Unterschiede in den Entwicklungswegen. Die Auswirkungen auf die Altersbestimmung lassen sich jedoch erst aus übereinandergelegten Entwicklungswegen ermitteln. Diese Situation zeigt Abbildung 4.24 unten für die Referenzmodelle solarer Elementhäufigkeit mit 0.97 und 0.78 Sonnenmassen gegenüber den Modellen mit 1.00 und 0.80 Sonnenmassen und 0.05 dex höherer Metallhäufigkeit. Wird demnach bei einem Stern von 0.97 Sonnenmassen die Metallizität um 0.05 dex zu hoch ermittelt, so ergibt sich ein Stern einer Sonnenmasse mit einer Milliarde Jahre geringerem Alter. Im Fall von 0.78 Sonnenmassen folgt ein 0.80 Sonnenmassen Stern, der 2.2 Milliarden Jahre jünger erscheint. Ein Fehler von 0.05 dex in der Metallizität stellt für spektroskopische Untersuchungen bei solarer Elementhäufigkeit durchaus eine realistische Größenordnung dar.

Die genannten Altersdifferenzen, sind auch in der Tabelle 4.4 dargestellt und beziehen sich auf die Turn-off-Region. Werden die Entwicklungswege in der Hertzsprunglücke zwischen Turn-off und dem Fuß zum Riesenast übereinandergelegt, so verringern sich die Unterschiede erheblich. Abbildung 4.25 oben zeigt exemplarisch den Sachverhalt für eine Sonnenmasse. Würde bei einem 0.98 Sonnenmassen Stern die Metallizität um 0.05 dex zu hoch ermittelt, so ergibt sich für die Hertzsprunglücke ein Stern mit 1.00 Sonnenmassen, dessen Alter um nur 300 Millionen Jahre zu jung ermittelt wird, gegenüber den zuvor genannten 1.0 Milliarden Jahren im Turn-off. Dieser Effekt wird im nächsten Kapitel nochmals eine Rolle spielen.

Wird eine Erhöhung der Metallizität um 0.05 dex für metallarme Sterne mit $[\text{Fe}/\text{H}]=-2.0$ durchgeführt, so zeigt Abbildung 4.25 unten, daß sich keine sehr deutlichen Auswirkungen einstellen. Der Altersfehler ist in diesem Fall für Sterne zwischen 0.90 und 0.70 Sonnenmassen kleiner als 100 Millionen Jahre. Bei derart geringer Metallizität spielen 0.05 dex Änderung keine Rolle mehr. Allerdings ist hier auch ein größerer spektroskopischer Fehler bei der Bestimmung von Elementhäufigkeiten zu erwarten. Daher wurden die bisherigen Untersuchungen nochmals für 0.10 dex erhöhte Metallizität durchgeführt. Abbildung 4.26 zeigt die geringe Änderung für metallarme Sterne.

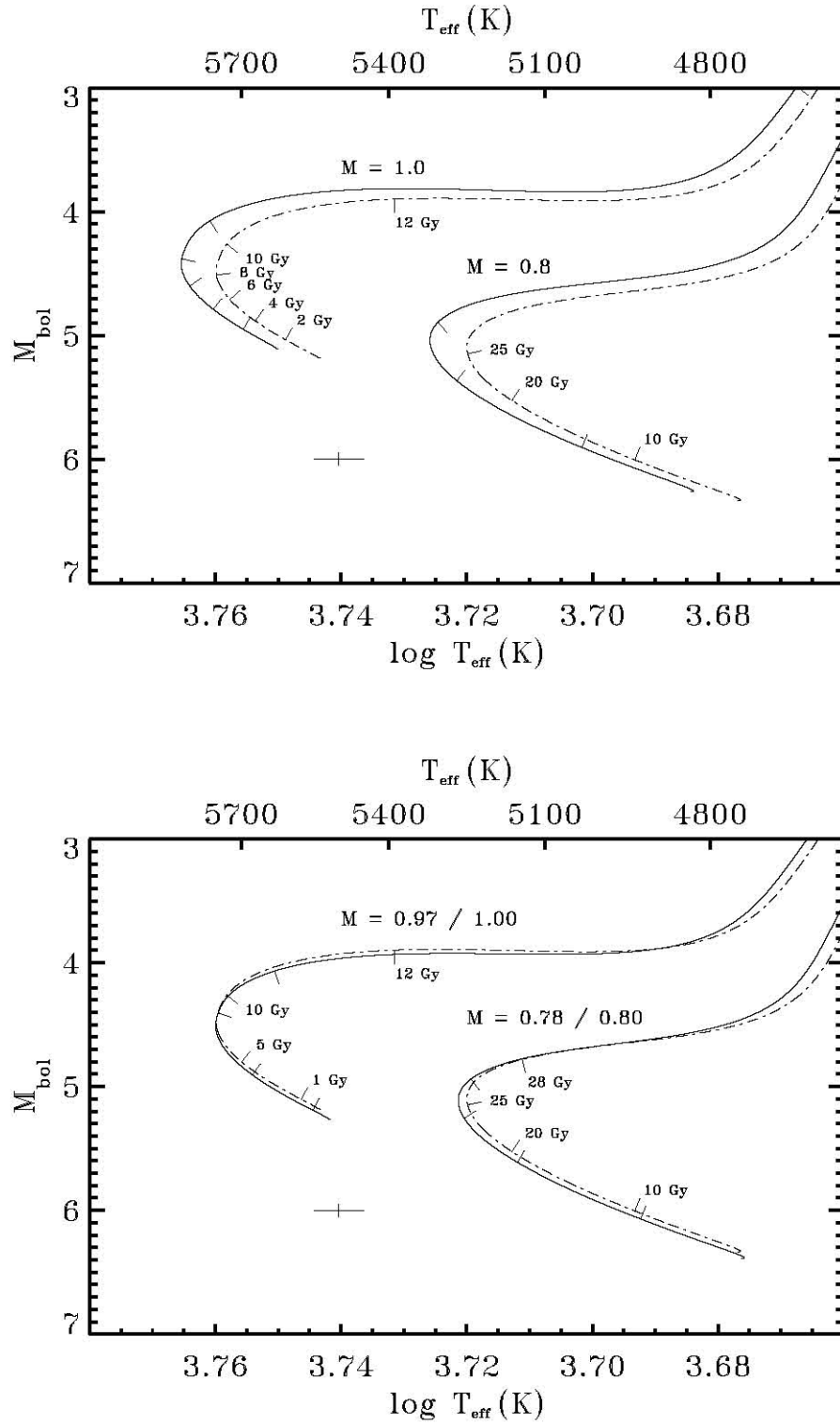


Abbildung 4.24 Entwicklungswege für solare Metallizität (durchgezogen) gegenüber $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.05$ (unterbrochen). **Oben:** Jeweils mit 0.90 und 0.70 Sonnenmassen. **Unten:** Bei den Referenzmodellen mußten die Massen reduziert werden, um die Altersauswirkung zu bestimmen. Die beschrifteten Altersmarken gehören zu den Entwicklungswegen mit $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.05$, während sich die unbeschrifteten Marken mit identischen Altern auf die Referenzmodelle beziehen. Somit lassen sich die Ergebnisse in der Tabelle 4.4 und im Text ermitteln.

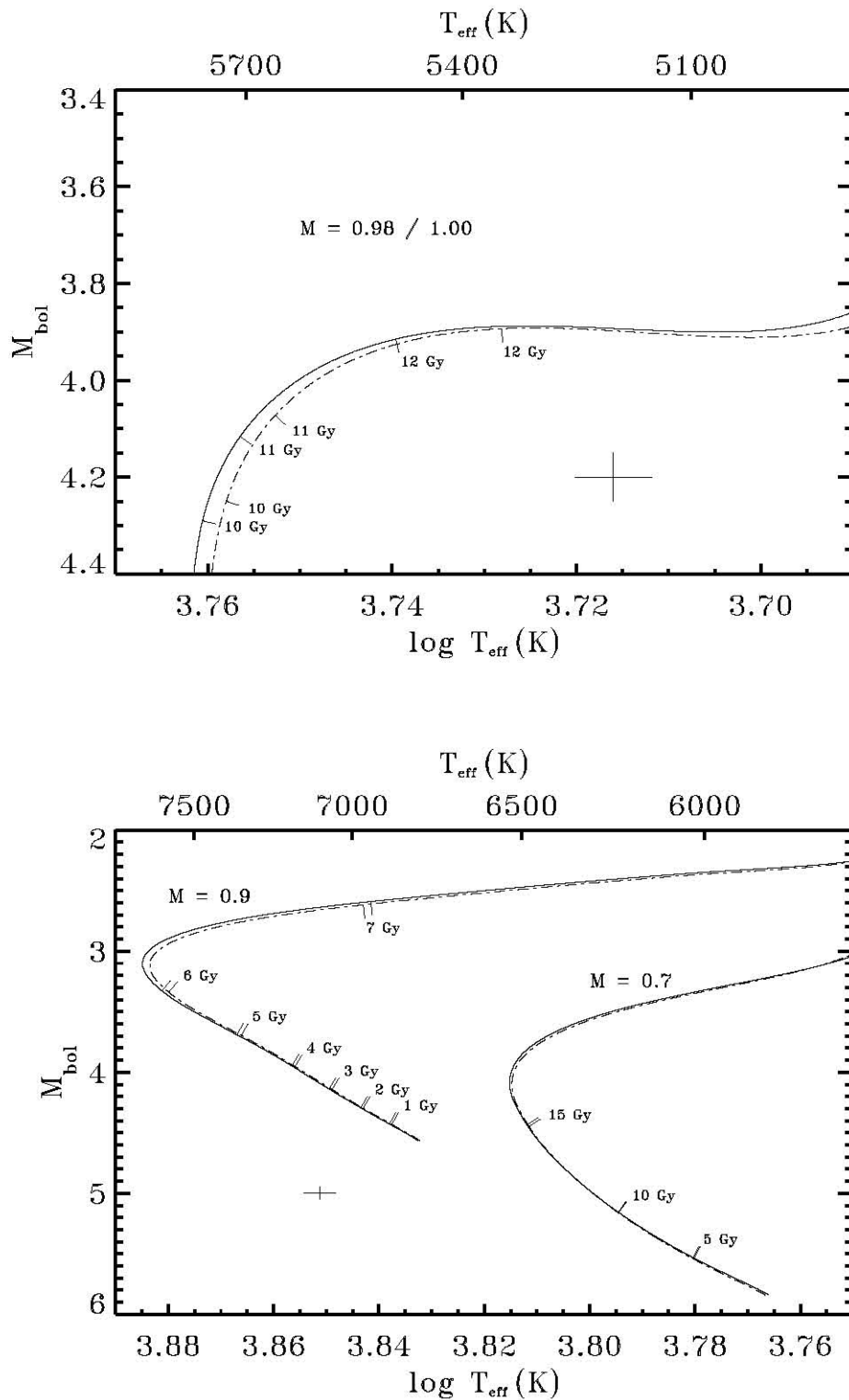


Abbildung 4.25 Oben: Durchgezogener Entwicklungsweg mit solarer Metallizität für 0.98 Sonnenmassen gegenüber dem unterbrochenen Weg mit $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.05$ und 1.00 Sonnenmassen. Der Unterschied in der Metallizität ergibt für die Hertzsprunglücke eine Altersverringering um 300 Millionen Jahre. **Unten:** Entwicklungswege für Metallizität $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ (durchgezogen) gegenüber $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.95$ (unterbrochen) für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen mit Altersunterschieden unter 100 Millionen Jahren.

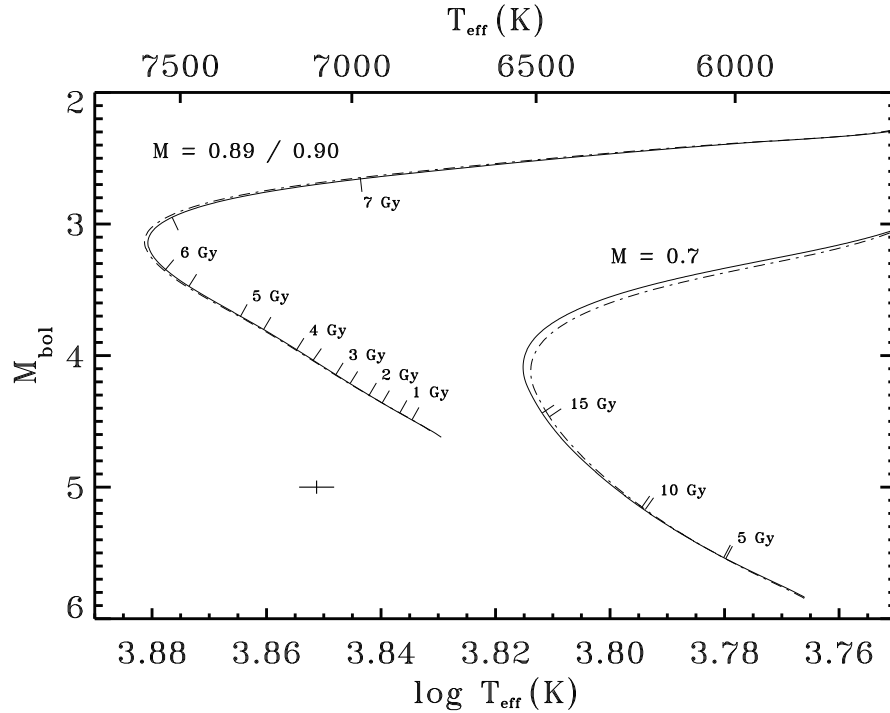


Abbildung 4.26 Entwicklungswege für Metallizität $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ mit 0.89 und 0.70 Sonnenmassen. Diese Referenzmodelle sind mit durchgezogenen Wegen dargestellt. Die unterbrochenen Entwicklungswege sind mit einer Metallizität von $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.90$ für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen berechnet. Bei den massereicheren Sternen ergeben sich um 200 Millionen Jahre und bei den massearmen Sternen um 400 Millionen Jahre geringere Alter.

Ein Stern mit 0.89 Sonnenmassen würde mit 0.10 dex zu hoch bestimmter Metallizität als 0.90 Sonnenmassen Stern bewertet werden, der um 200 Millionen Jahre jünger erscheint. Zur Vollständigkeit sind die Ergebnisse bei Erhöhung der Metallizität um 0.10 dex für solare Häufigkeiten in Tabelle 4.4 angeführt und ebenso befinden sich die Ergebnisse bei einer Erhöhung der Metallizität um 0.05 dex und 0.10 dex für $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.0$ in der genannten Tabelle.

Der Fehler in der spektroskopischen Bestimmung der Metallhäufigkeit wirkt sich bei solaren chemischen Häufigkeiten schwerwiegender aus, als für metallarme Sterne. Die derzeit üblichen Genauigkeitsgrenzen von etwa 0.07 dex bei $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.0$ sind aber keine unüberwindliche Hürde in Bezug auf eine absolute Altersbestimmung, entgegen oftmals anders lautender Behauptungen. Eine sorgfältige Bestimmung der Metallizität ist jedoch eine unabdingbare Voraussetzung für gute Altersdaten.

4.8.5.3 Häufigkeit von Alpha-Elementen

Bisher wurde nur betrachtet, welche Auswirkungen eine Änderung in der Häufigkeit *aller* Metalle für die Bestimmung von Sternaltern besteht. Wie stellt sich der Sachverhalt jedoch dar, wenn nur einzelne Elemente oder ganze Elementgruppen geänderte chemische Häufigkeiten aufweisen ?

Tabelle 4.2 Umrechnung der spektroskopischen Überhäufigkeit von Alpha-Elementen $[\alpha/\text{H}]$ in eine Erhöhung der allgemeinen Metallhäufigkeit $[\text{M}/\text{H}]$ unter Verwendung von Tabelle 3.1.

$[\alpha/\text{Fe}]$	+0.20	+0.40	+0.60
$[\text{M}/\text{H}]$	+0.145305	+0.306877	+0.480756

Aus einer Vielzahl von spektroskopischen Untersuchungen der Sterne in den letzten Jahrzehnten hat sich ergeben, daß nicht unbedingt alle denkbar möglichen Änderungen der Elementhäufigkeiten für die Sternentwicklung studiert werden müssen. Vielmehr treten bestimmte Änderungen von Häufigkeitsmerkmalen öfter auf, wie etwa die Überhäufigkeit der sogenannten Alpha-Elemente (vgl. Abschnitt 4.5.1). Dies äußert sich als relativ zu Eisen höhere Häufigkeit von chemischen Elementen, die mittels α -Prozess in massereichen Sternen erzeugt werden (O, Mg, Si, S, Ca, Ti). Bezeichnend ist, daß die Überhäufigkeit mit abnehmender Metallizität wächst. So ergeben sich bei Sternen mit etwa $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.0$ Werte von $[\alpha/\text{Fe}] = +0.2$ bis $+0.4$, während bei metallärmeren Sternen auch $[\alpha/\text{Fe}] = +0.6$ anzutreffen ist.

Eine Häufigkeitsänderung der Alpha-Elemente zieht in erster Linie geänderte Massenbruchteile nach sich. Für den Sternaufbau werden, wie bereits geschildert, die Opazitätstabellen nur in Massenbruchteile von Wasserstoff (X), Helium (Y), und Metallen (Z) unterteilt. Ein bestimmtes Tripel von Massenbruchteilen läßt sich nun allerdings sowohl durch Änderung der gesamten Metallhäufigkeit, als auch durch die alleinige Variation der Alpha-Elemente erzeugen. Entsprechend läßt sich, was die Massenbruchteile betrifft, jede geänderte Alpha-Elementhäufigkeit in eine Änderung der gesamten Metallhäufigkeit umrechnen. Ein Vergleich von Änderungswerten wird in Tabelle 4.2 dargestellt. Bereits die Gegenüberstellung in obiger Tabelle verdeutlicht, daß für eine solide Altersbestimmung die Ermittlung der Alpha-Elementhäufigkeiten nicht einfach vernachlässigbar ist. Es würden sich sonst entsprechend große Fehler in der Metallizität ergeben, deren Auswirkungen gemäß des letzten Abschnitts 4.8.5.2 deutlich bemerkbar sind. Allerdings werden bei der einfachen Gleichstellung einer Häufigkeitsvariation von Alpha-Elementen gegenüber der entsprechenden Änderung der gesamten Metallhäufigkeit gemäß Tabelle 4.2 zwei physikalische Auswirkungen unterschlagen.

Erstens hat die Häufigkeit der Alpha-Elemente einen Einfluß auf die Reaktionsraten des CNO-Zyklus. Jedoch spielt bei den massearmen Sternen, die Gegenstand dieser Arbeit sind, der CNO-Zyklus für die Energieerzeugung nur eine untergeordnete Rolle. Entwicklungswege für Sterne verschiedener Massen bei $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.0$, mit einer Alpha-Element-Überhäufigkeit von 0.6 dex gegenüber einer um 0.480756 dex höheren gesamten Metallizität, zeigt Abbildung 4.27. Es ist erkennbar, daß der Anteil der Energieerzeugung mittels des CNO-Zyklus etwa ab dem Turn-off bemerkbar wird. Dort steigt die Temperatur im Sterninneren auf die erforderliche Größenordnung ($\log T \approx 7.28$). Allgemein führt dieser Effekt dazu, daß ein höherer Anteil an Alpha-Elementen gegenüber einer äquivalent höheren allgemeinen Metallizität zu einer Beschleunigung der Sternentwicklung führt. Für die betrachteten massearmen Sterne von einer Sonnenmasse und weniger liegt dieser Effekt selbst bei 0.6 dex höherer Alpha-Element-Häufigkeit bei maximal 500 Millionen Jahre älteren Sternen gegenüber der Veränderung der gesamten Metallizität. Trotzdem wurden bei allen folgenden Berechnungen dieses Abschnitts die Massenbruchteile über die korrekten Alpha-Element-Anreicherungen berechnet. Ein einfacher Austausch von Metallizitätsanreicherung und Überhäufigkeit an Alpha-Elementen gemäß Tabelle 4.2 wäre aber unter dem geschilderten Einfluß des CNO-Zyklus noch relativ unproblematisch.

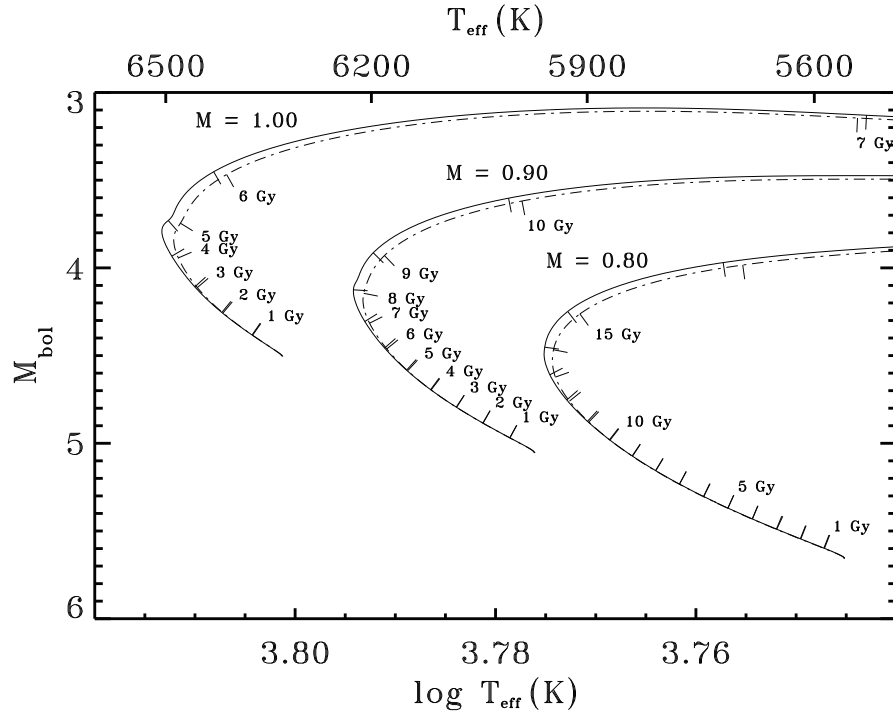


Abbildung 4.27 Oben: Durchgezogene Entwicklungswege für 1.00, 0.90 und 0.80 Sonnenmassen mit $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.0$ und $[\alpha/\text{Fe}] = +0.6$. Unterbrochene Wege dagegen mit $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.519244$. Nominal ergeben sich zwar identische Massenbruchteile für Wassertoff, Helium und Metalle, doch werden bei höherem Alpha-Element-Anteil die Reaktionsraten für den CNO-Zyklus vergrößert, was sich etwa ab dem Turn-off in bis zu 500 Millionen Jahre älteren Sternen äußert.

Als Zweites wirkt sich ein geänderter Anteil von Alpha-Elementen eigentlich auch auf die Opazität aus. Allerdings müssen dann entsprechend neue Opazitätstabellen berechnet werden. Es ist zu erwarten, daß eine Erhöhung des Massenbruchteils durch mehr Alpha-Elemente im Gegensatz zu allgemein mehr Metallen eine geringere Opazitätserhöhung nach sich zieht. Die Metalle sind in der Lage mit wesentlich mehr Elektronen und atomphysikalischen Übergangsmöglichkeiten insbesondere zu den kühlen Opazitäten beizusteuern. Entsprechend weisen Entwicklungswege mit mehr Metallen und damit höherer Opazität auch geringere Effektivtemperaturen auf.

Exemplarisch werden die Auswirkungen von unterschiedlichen Anreicherungen an Alpha-Elementen ohne Berücksichtigung der Opazitäten in Abbildung 4.28 verdeutlicht. Erneut bestätigt sich, daß bei metallarmen Sternen eine Häufigkeitsvariation an Bedeutung verliert. Jedoch ist selbst bei $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ eine Alpha-Überhäufigkeit von $[\alpha/\text{Fe}] = +0.60$ in der Altersbestimmung klar bemerkbar, wie Abbildung 4.28 und Tabelle 4.4 zeigen.

Die Auswirkungen auf eine Altersbestimmung unter Berücksichtigung der Opazitäten konnte leider nur für $[\alpha/\text{Fe}] = +0.40$ untersucht werden, da nur diese Opazitätstabellen mit gesonderter Elementmischung zur Verfügung stand. Diese Tabellen stammen von Rogers & Iglesias, sowie für die kühlen Opazitäten von Alexander & Ferguson und wurden erneut von A. Weiss bereitgestellt (siehe auch Salaris & Weiss, 1998). Die erwarteten höheren Effektivtemperaturen bei Berücksichtigung der Opazitäten haben für solare Häufigkeiten enorme Auswirkungen auf die Sternalter, während sich bei geringer Metallizität keine wesentlichen Altersunterschiede bemerkbar machen (vgl. Abbildung 4.29 und Tabelle 4.3).

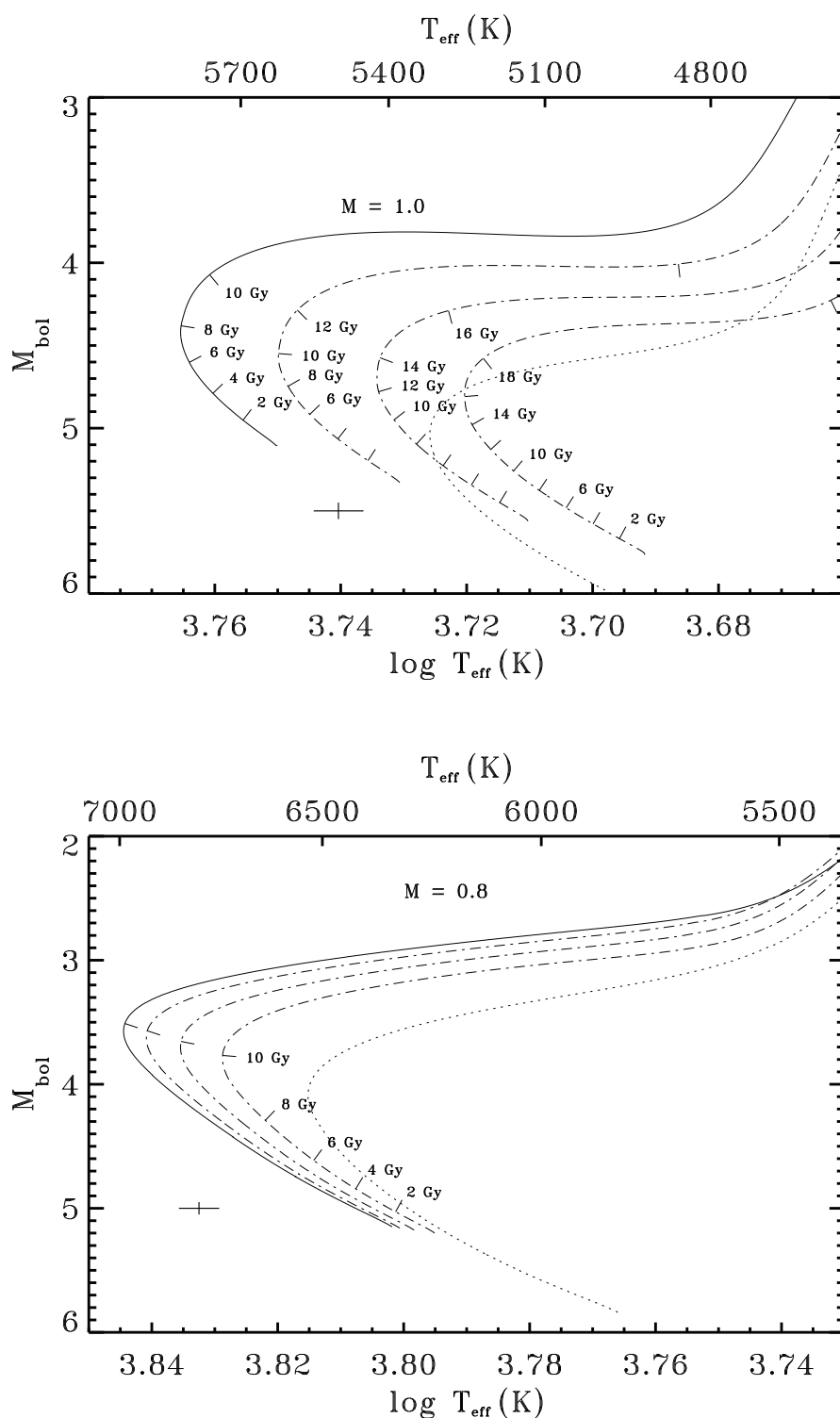


Abbildung 4.28 Oben: Durchgezogener Entwicklungsweg mit solarer Metallizität für eine Sonnenmasse gegenüber den unterbrochenen Wegen (von links nach rechts) mit $[\alpha/\text{Fe}] = 0.20, 0.40$ und 0.60 . Gepunktet dargestellt ist ein Entwicklungsweg für 0.80 Sonnenmassen ohne Anreicherung von Alpha-Elementen.

Unten: Entwicklungswege für Metallizität $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ und 0.80 Sonnenmassen. Durchgezogen ohne Anreicherung von Alpha-Elementen gegenüber $[\alpha/\text{Fe}] = 0.20, 0.40$ und 0.60 (erneut von links nach rechts) als unterbrochene Entwicklungswege. Gepunktet wieder ohne Alpha-Element-Anreicherung für 0.70 Sonnenmassen.

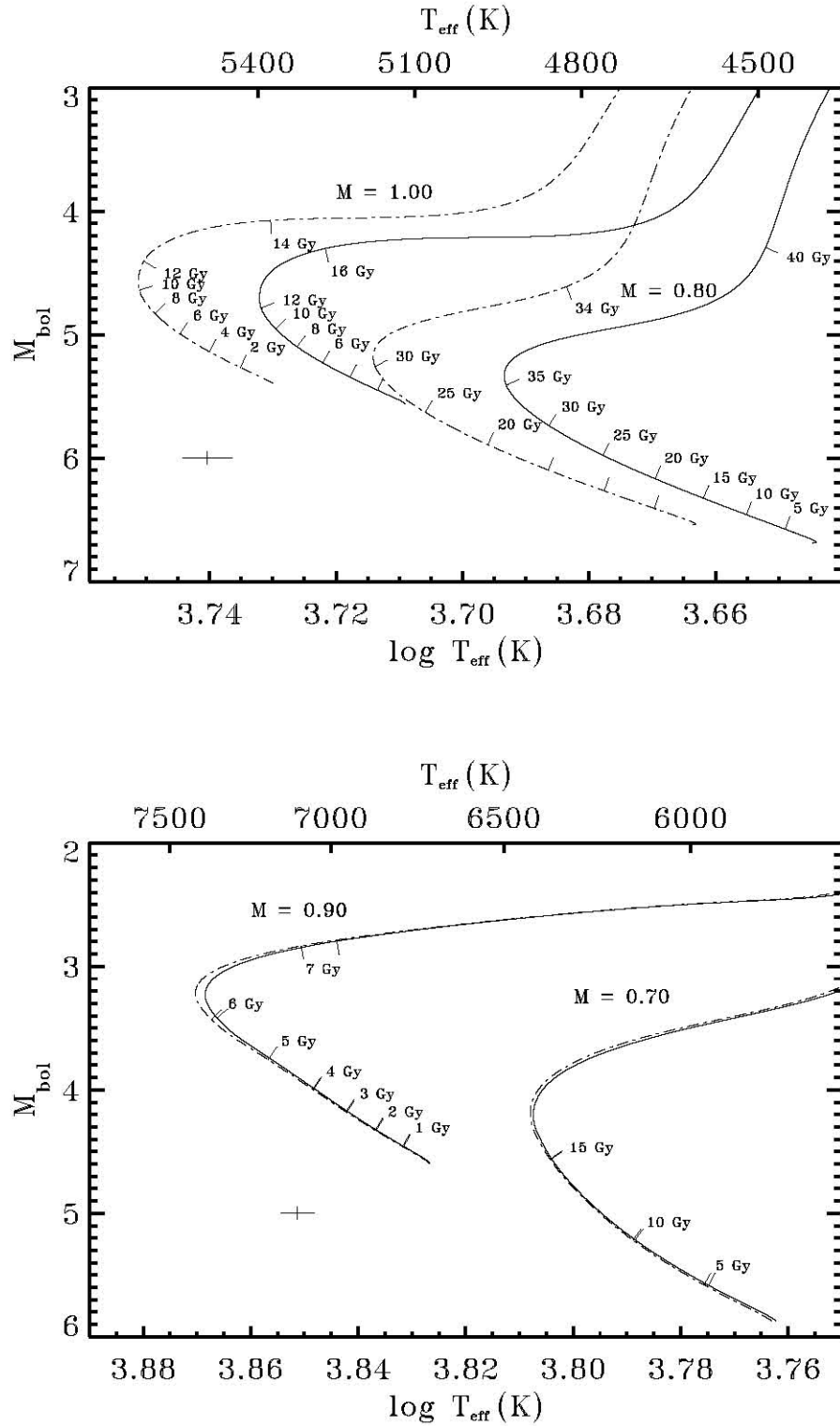


Abbildung 4.29 Vergleich zwischen Entwicklungswegen mit $[\alpha/\text{Fe}] = +0.40$. Einerseits mit Standardopazitäten und Alpha-Element-Anreicherung nur in den Massenbruchteilen (durchgezogen). Andererseits noch mit Opazitätstabellen unter korrekter Alpha-Element-Häufigkeit (unterbrochen). Die Altersunterschiede entnehme man Tabelle 4.3. **Oben:** Entwicklungswegen bei solarer Metallizität für 1.00 und 0.80 Sonnenmassen. **Unten:** Entwicklungswegen für Metallizität $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen.

Werden nun die Ergebnisse für $[\alpha/\text{Fe}] = +0.40$ aus den beiden Tabellen 4.3 und 4.4 zusammen betrachtet, so ergibt sich als Schlußfolgerung:

Die Berücksichtigung von vorhandenen Anreicherungen mit Alpha-Elementen allein durch Änderung der Massenbruchteile führt bei den Auswirkungen auf die Altersbestimmung zu einer teilweise extremen Überbewertung. Vielmehr ist die Verwendung von entsprechend mit Alpha-Elementen angereicherten Opazitätstabellen unbedingt erforderlich, da dies eine deutliche Reduzierung der Altersunterschiede bewirkt. Im Fall der mit derartigen Opazitätstabellen durchgeführten Entwicklungsrechnungen ($[\alpha/\text{Fe}] = +0.40$) lagen die Altersdifferenzen am Turn-off in der Größenordnung der spektroskopisch erreichbaren Altersfehler. Dies ist als ausreichender Grund für eine korrekte Berücksichtigung der Alpha-Element-Häufigkeit anzusehen.

Es sollte aber auch erwähnt werden, daß sich die Altersunterschiede im Bereich der Hertzsprunglücke verringern. Dies ist ähnlich, wie bereits im letzten Abschnitt gezeigt, eine Art *topologischer* Effekt für die unterschiedlichen Entwicklungswege und wird im nächsten Kapitel nochmals aufgegriffen. Weiter wird aus den vorangegangenen Betrachtungen klar, daß auch größere Abweichungen einzelner Elemente vom Häufigkeitsmuster der Tabelle 3.1 bedeutende Veränderungen in den Massenbruchteilen nach sich ziehen können. Insbesondere die spektroskopisch häufigen Elemente, wie etwa Kohlenstoff, Sauerstoff, Stickstoff usw. spielen eine entsprechende Rolle. Dabei ist ausführlich zu klären, welche Auswirkungen sich bei einzelnen Häufigkeitsänderungen auf die Opazitäten ergeben. Hierzu sind weitere detaillierte Opazitätstabellen nötig, die für diese Arbeit nicht zur Verfügung standen. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß auch die beiden Alpha-Elemente Neon und Argon bei allen Häufigkeitsänderungen mit einbezogen wurden.

4.8.5.4 Heliumhäufigkeit

Bisher wurde die Heliumhäufigkeit nur als eine Größe betrachtet, die sich aus der Anpassung der Entwicklungswege an der Position der heutigen Sonne im Hertzsprung-Russell-Diagramm ergibt. Es stellt sich aber beim Übergang zu metallarmen Sternen die Frage, ob und wie die Heliumhäufigkeit variiert. Aus kosmologischen Modellen, welche die Anfangsphase des Weltalls beschreiben, lassen sich auch Aussagen über den Massenbruchteil des Heliums gewinnen, der bei der Entstehung der ersten Sterngeneration vorhanden war. Die Werte liegen für die meisten Modelle bei $Y=0.23-0.24$ (Olive *et al.* 1997). Nachdem der solare Massenbruchteil des Heliums $Y \approx 0.27$ beträgt, sind für entsprechend alte Sterne durchaus geringere Massenbruchteile zu erwarten. Dies erfordert eine Untersuchung über die Größe der Altersunsicherheit, nachdem die Heliumhäufigkeit bei kühlen Sternen leider nicht spektroskopisch bestimmbar ist.

Abbildung 4.30 zeigt deutlich, daß die Verschiebung der Entwicklungswege aufgrund einer geänderten Heliumhäufigkeit relativ unabhängig von der Metallizität ist. Für metallarme Sterne ergeben sich geringere Abweichungen in der Altersbestimmung als bei solarer Metallizität (vgl. Tabelle 4.4). Dabei sollte jedoch beachtet werden, daß ein Heliummassenbruchteil von $Y=0.230$ für Sterne solarer Metallizität äußerst unwahrscheinlich ist.

Insgesamt werden die Alter von beobachteten Sternen aufgrund eines niedrigeren Heliumanteils jünger berechnet. Die Altersdifferenzen besitzen bei realistischer Änderung des Heliumanteils etwa die Größenordnung der erreichbaren Genauigkeitsgrenze für die jeweilige Altersbestimmung am Turn-off.

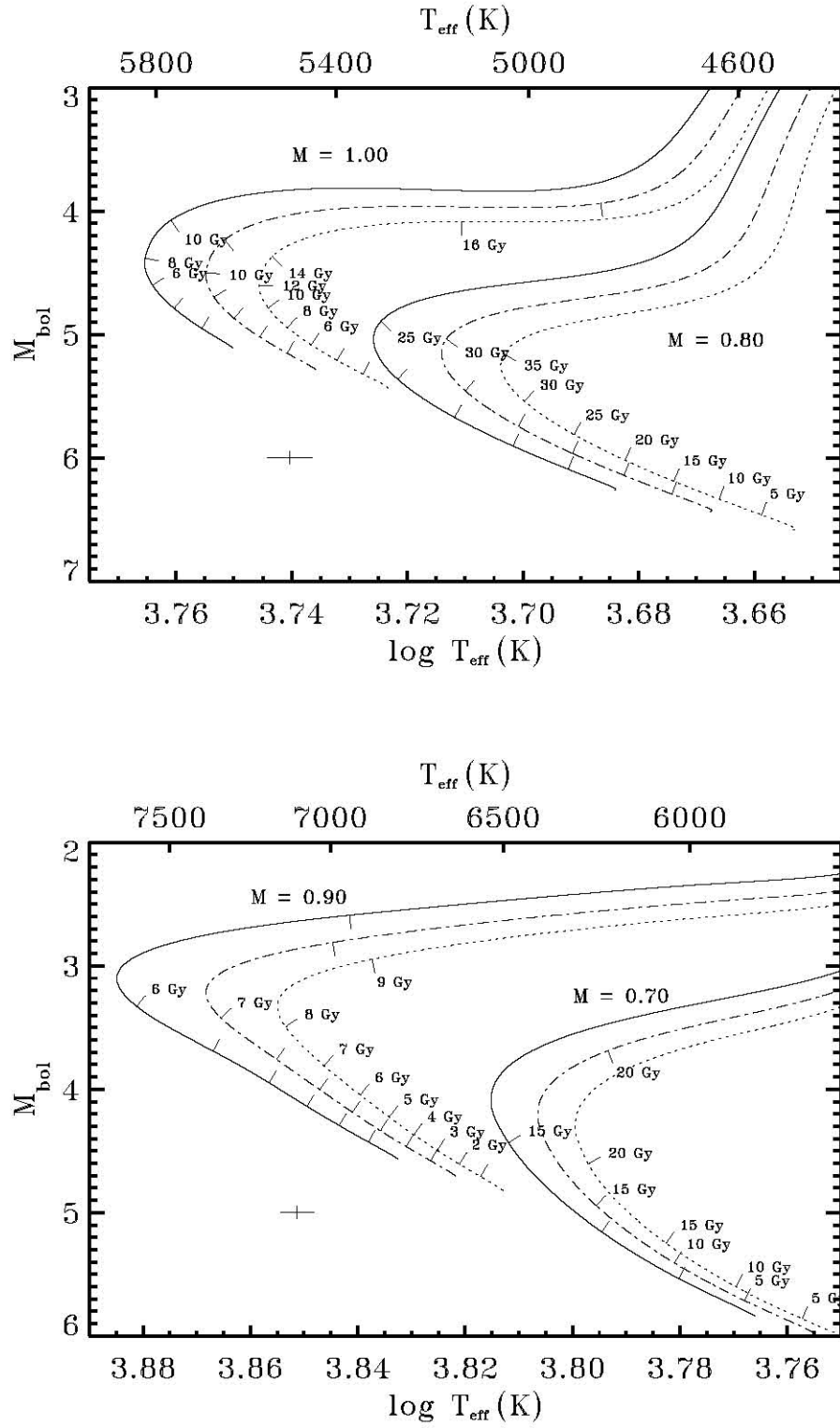


Abbildung 4.30 Gegenüberstellung von Entwicklungswegen mit drei Massenbruchteilen für Helium: $Y=0.2732$ (durchgezogen), $Y=0.250$ (unterbrochen) und $Y=0.230$ (gepunktet) für verschiedene Massen und chemische Häufigkeiten. **Oben:** Entwicklungswegen mit solarer Metallizität für 1.00 und 0.90 Sonnenmassen. **Unten:** Entwicklungswegen für Metallizität $[Fe/H]=-2.0$ für 0.90 und 0.70 Sonnenmassen.

Aus der allgemeinen Verjüngung der Sternalter mit abnehmender Heliumhäufigkeit und aus Abbildung 4.30 kann entnommen werden, daß die Nullalter-Hauptreihe leicht in Richtung höherer Leuchtkräfte verschoben wird. Wie im Kapitel 5 noch zu sehen sein wird, kann sich eine Variation des Heliumanteils aber auch nur sehr geringfügig auswirken. Dies hängt, ebenso wie die Altersdifferenzen der letzten beiden Abschnitte, von der Lage des Sterns im Hertzsprung-Russell-Diagramm ab. Auch hier werden die Altersunterschiede im Bereich der Hertzsprunglücke wieder geringer. Schließlich kann man sich anhand der Abbildung 4.30 zusätzlich noch verdeutlichen, daß die Altersunterschiede in Tabelle 4.3 zum Teil auch durch die geänderten Heliummassenbruchteile bedingt sind.

4.8.6 Diffusion

Als letzter Einfluß auf die Modellphysik wird die im Abschnitt 4.6 beschriebene Diffusion von chemischen Elementen nach Bahcall, Thoul & Loeb (1994) während der Sternentwicklung betrachtet. Abbildung 4.31 zeigt zunächst die beachtlichen Auswirkungen auf den Entwicklungsverlauf bei einer reinen Diffusion von Helium und Wasserstoff. Um für diesen Fall ein Sonnenmodell an der heutigen Sonne zu eichen wird ein Massenbruchteil von $Y=0.2715$ für Helium benötigt, sowie ein Mischungswegparameter von $\alpha=1.703$.

Für metallarme Entwicklungswege ergaben sich bei 0.90 Sonnenmassen numerische Probleme in der Berechnung der Diffusionskonstanten. Dies konnte auf schlechte Bedingungen bei der benötigten Invertierung von *Häufigkeitsmatrizen* zurückgeführt werden. Die Matrizen werden zunehmend ungleichmäßig besetzt, sobald im Sternaufbau eine nahezu vollständige Entmischung von Wasserstoff und Helium erreicht wird. Entsprechend wurden die Entwicklungswege in der Abbildung 4.31 für die Sterne mit 0.90 Sonnenmassen durch Sterne mit 0.85 Sonnenmassen ersetzt und in Tabelle 4.3 befinden sich keine Angaben für Sterne mit 0.90 Sonnenmassen bei einer Metallizität von $[Fe/H]=-2.0$ mit Diffusion.

Ganz allgemein sinken bei der Diffusion die schwereren Heliumatome im *Wasserstoffsee* des Sterns in Richtung Sternmitte ab, was dort eine Erhöhung des mittleren Molekulargewichts zur Folge hat. Gleichzeitig verändert sich die Ausdehnung der Konvektionszone aufgrund der neuen Häufigkeitsverhältnisse. In Folge der geänderten Hüllenstruktur muß sich ein neues Gleichgewicht einstellen. Außerdem wird die Energieproduktionsrate im Sterninneren verringert, da sich mehr Helium im Kern befindet. Kerndruck und Kerntemperatur erhöhen sich leicht, um die für ein neues Gleichgewicht erforderliche Energieproduktionsrate zu erhalten. Letztendlich kommt es zu einem etwas schnelleren Anstieg der Leuchtkraft im Vergleich zu einem Stern ohne Wasserstoff- und Heliumdiffusion. Der Diffusionsvorgang ergibt für einen Stern an einer bestimmten Position im Hertzsprung-Russell-Diagramm eine deutliche Verringerung des Alters gegenüber von Entwicklungsrechnungen ohne Diffusion (vgl. Tabelle 4.3). Das Absinken des Heliums als Folge der Diffusion wird beispielhaft in Abbildung 4.32 für einen metallarmen Stern mit 0.85 Sonnenmassen gezeigt.

Neben der Auswirkung auf die rascher ansteigende Leuchtkraft ergibt sich durch die geänderte chemische Schichtung auch ein tiefer liegender unterer Rand der Konvektionszone innerhalb der Sterne. Die Lage dieses Randes kann mit Hilfe der Helioseismologie ebenso wie die Zustandsgleichung (vgl. Abschnitt 4.8.4) getestet werden. Christensen-Dalsgaard, Gough und Thompson (1991) haben aus einer Invertierung der verschiedenen Oszillationsmoden als Tiefe für den unteren Rand der Konvektionszone der heutigen Sonne $r_b = 0.713 \pm 0.003 R_\odot$ gefunden.

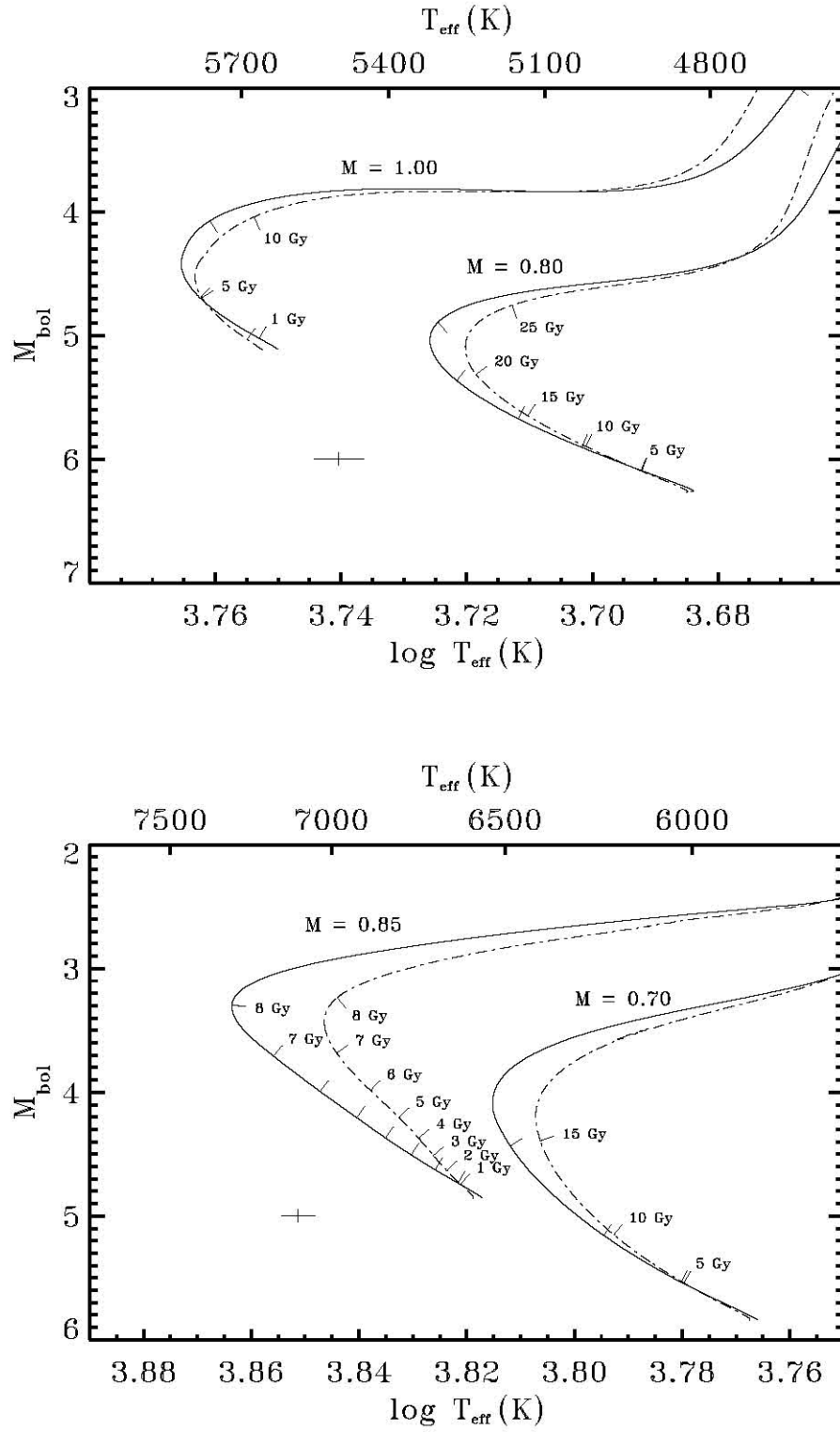


Abbildung 4.31 Entwicklungswege mit Heliumdiffusion (unterbrochen) gegenüber den Referenzmodellen (durchgezogen). **Oben:** Entwicklungswege mit solarer Metallizität für 1.00 und 0.80 Sonnenmassen. **Unten:** Entwicklungswege für Metallizität $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$ für 0.85 und 0.70 Sonnenmassen.

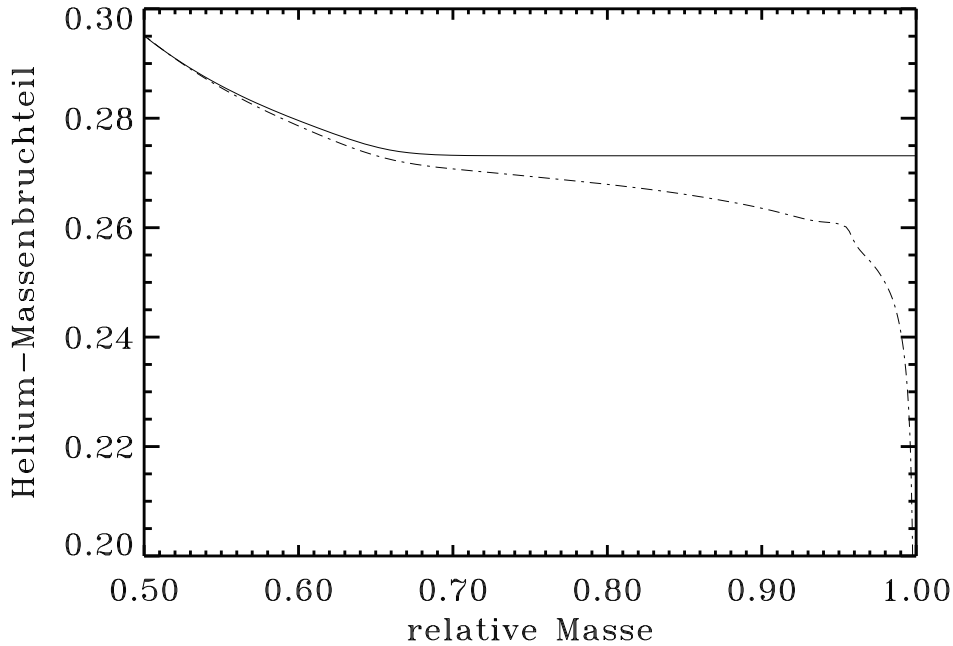


Abbildung 4.32 Verlauf der Heliumhäufigkeit in Massenbruchteil über die relative Sternmasse für einen Stern mit 0.85 Sonnenmassen und Metallizität $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.0$. Das Referenzmodell ist durchgezogen und der unterbrochene Verlauf ist mit Heliumdiffusion gerechnet.

Aus den Modellrechnungen für diese Arbeit ergab sich für ein Sonnenmodell mit Diffusion ein unterer Rand der Konvektionszone bei $r_b = 0.720R_\odot$, während im Fall ohne Berücksichtigung der Diffusion der untere Rand der Konvektionszone bei $r_b = 0.735R_\odot$ zu liegen kam. Eine restliche Unsicherheit für die Tiefe des unteren Konvektionszonenrands kann durch die Wahl der Zustandsgleichung verursacht werden. Damit liefert die Helioseismologie einen Anhaltspunkt für die Richtigkeit einer Diffusionsannahme innerhalb der Sterne. Nebenbei würde sich unter Berücksichtigung der Diffusion nach den Ergebnissen der Tabelle 4.3 die Diskrepanz zwischen der Altersbestimmung von Kugelsternhaufen und dem kosmologischen Weltalter (vgl. Abschnitt 2.3) deutlich verringern.

Nicht nur die Diffusion von Wasserstoff und Helium ist möglich, sondern auch ein Absinken der Metalle innerhalb eines Sterns. Aufgrund des geringen Massenbruchteils der Metalle sind jedoch keine besonderen Auswirkungen auf die Entwicklungswege zu erwarten. Dies bestätigt sich sowohl in Abbildung 4.33, bei der Entwicklungswege mit beiden Diffusionsarten gegenübergestellt wurden, als auch durch die kaum geänderten Parameter zum Erreichen der heutigen Sonne ($Y=0.2713$, $\alpha=1.692$). Jedoch ergibt sich als Folge der Metaldiffusion eine Abnahme der Metallhäufigkeit in den obersten Schichten der Sternatmosphäre. Dies kann Auswirkungen auf die spektroskopische Bestimmung der Metallizität haben. Es stellt sich die Frage, ob eine Metaldiffusion zu deutlich geringeren Metallhäufigkeiten bei der spektroskopischen Analyse führt.

Hierzu wurden Sternmodelle in der Nähe der Turn-off-Region betrachtet, da die Auswirkungen der Diffusion dort am größten sind. Diese Aussage kann mit dem steigenden Grad an Entmischung bei größer werdenden Sternaltern begründet werden, nachdem mehr Zeit für den Diffusionsprozesse zur Verfügung steht.

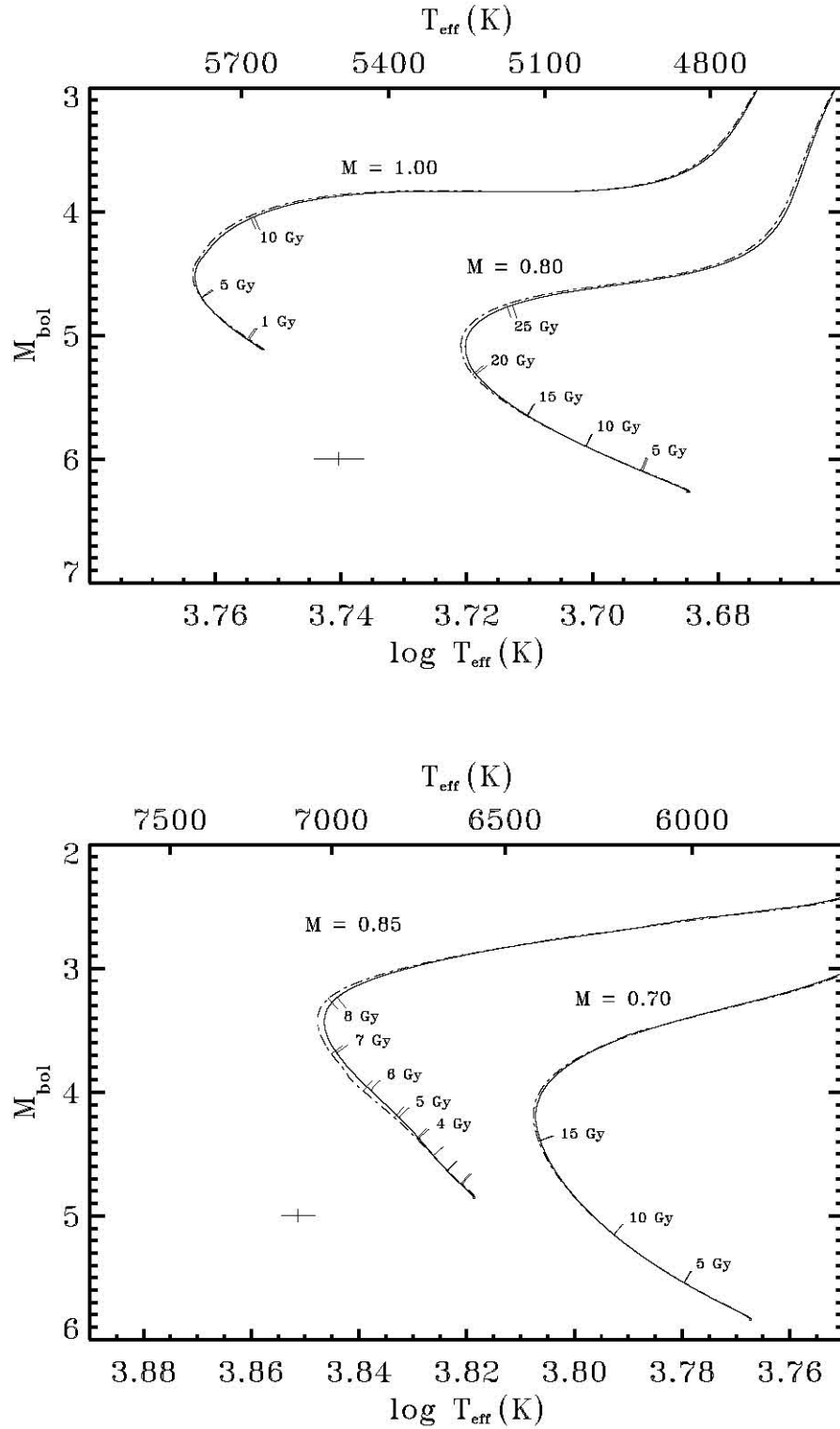


Abbildung 4.33 Entwicklungswege mit reiner Heliumdiffusion (durchgezogen) gegenüber Entwicklungs-
wegen mit zusätzlicher Metalldiffusion (unterbrochen). **Oben:** Entwicklungswege mit solarer Metallizität
für 1.00 und 0.80 Sonnenmassen. **Unten:** Entwicklungswege für Metallizität $[Fe/H] = -2.0$ für 0.85 und 0.70
Sonnenmassen.

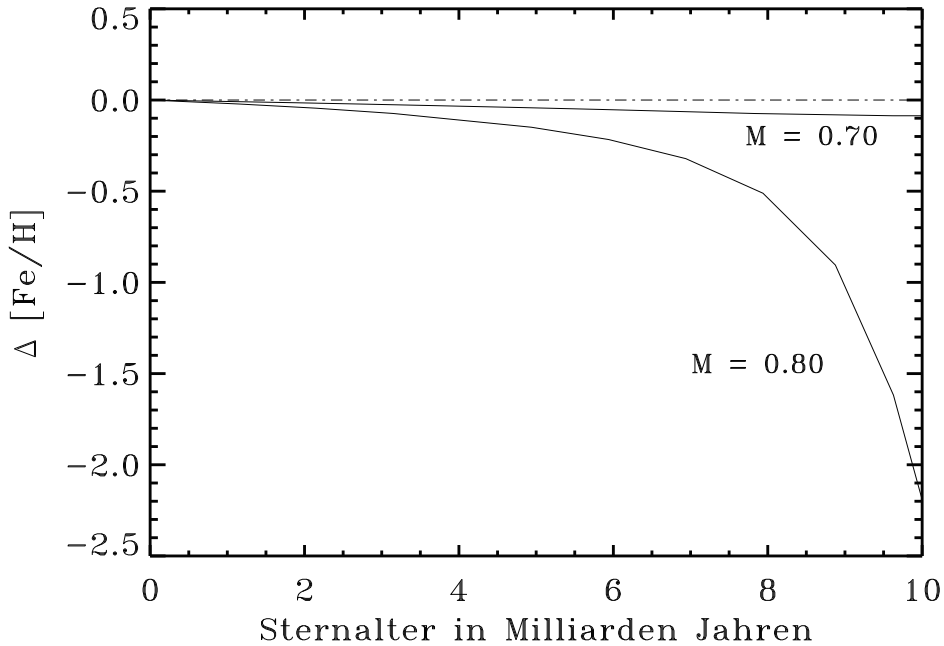


Abbildung 4.34 Veränderung der Metallizität im Verlauf der Sternentwicklung für zwei Sterne mit Ausgangsmetallizität $[Fe/H] = -2.0$ für 0.80 und 0.70 Sonnenmassen. Die Abnahme der Metallizität für die höhere Masse hinterläßt jedoch den Eindruck einer zu großen Effizienz der Diffusion. Die Modelle mit Metaldiffusion sind durchgezogen und der unterbrochene Verlauf ist nur mit Heliumdiffusion gerechnet.

Andererseits dehnt sich mit Erreichen der Hertzsprung-Lücke die Konvektionszone innerhalb der Sterne aus. Am Riesenast werden die Sterne schließlich vollständig konvektiv, da der Riesenast erneut entlang der Hayashi-Linie verläuft. Damit ergibt sich jedoch eine Durchmischung der chemischen Zusammensetzung der Sterne und die Entmischung der Diffusion wird sehr effektiv rückgängig gemacht. Dies ist gleichzeitig auch ein Grund, warum oftmals nur Sterne vor dem Erreichen des Riesenastes für die Erforschung der chemischen Entwicklung der Galaxis herangezogen werden. Bis zum Riesenast geben die spektroskopischen Häufigkeiten einen Aufschluß über die chemische Zusammensetzung des interstellaren Mediums zum Zeitpunkt der Geburt des Sterns. Ab dem Riesenast werden auch Produkte aus den Energieerzeugungsprozessen an die stellare Oberfläche transportiert. Daneben wird eine Altersbestimmung am Riesenast sehr schwierig.

Die Entmischung der Metalle an der Sternoberfläche im Verlauf der Sternentwicklung ist für zwei Sterne mit einer Anfangsmetallizität von $[Fe/H] = -2.0$ in Abbildung 4.34 dargestellt. Während für 0.70 Sonnenmassen nach 10 Milliarden Jahren eine 0.1 dex geringere Metallhäufigkeit vorliegt, beträgt die Reduzierung für den 0.80 Sonnenmassen Stern etwa 2.0 dex. Aufgrund der bereits erwähnten numerischen Probleme bei einem Stern mit 0.90 Sonnenmassen liegt die Vermutung nahe, daß die Diffusion bei zu hoher Sternmasse zu effizient wird. Eine ähnlich drastische Abnahme der Metallizität kann auch mit solaren Häufigkeiten erreicht werden, wenn größere Sternmassen verwendet werden. Insofern bestätigt sich die Möglichkeit einer Überbewertung der Diffusion. Im Rahmen weiterer Modellrechnungen und einer Überprüfung des theoretischen Ansatzes sollte dieser Sachverhalt in der näheren Zukunft noch ausführlich untersucht werden.

Abschließend kann festgehalten werden, daß die Diffusion einen erheblichen Einfluß auf die Entwicklungswege und damit auch auf das Sternalter hat. Neben der Reduzierung der Alter aufgrund der Entwicklungswege führt in den Bereichen des Hertzsprung-Russell-Diagramms, die nicht von der Überbewertung der Metaldiffusion betroffen sind, die Abnahme der Metallizität um etwa 0.1 dex an der Sternoberfläche im Bereich des Turn-offs zu einer weiteren Verjüngung der Sternalter, wie sie mit Hilfe von Tabelle 4.4 abgeschätzt werden können.

4.8.7 Ergebnisüberblick

Am Ende dieses Kapitels sind in den Tabellen 4.3 und 4.4 die Ergebnisse aus den Untersuchungen gegenübergestellt. In vielen Fällen liegen in Tabelle 4.3 die Altersdifferenzen unter der erreichbaren Altersgenauigkeit, die sich aufgrund der Fehlergrenzen von Effektivtemperatur und bolometrischer Helligkeit ergibt. Die Frage, ob diese kleinen Altersdifferenzen sich zu einem beachtlichen Wert aufaddieren können, hängt von der einzelnen Kombination gegenüber dem Referenzmodell ab. Im Fall solarer Metallizität ergibt sich aus der Summe der Effekte gegenüber dem Referenzmodellen bei 0.90 und 0.80 Sonnenmassen eine deutliche Verjüngung der Sternalter, welche im Wesentlichen auf die Diffusion rückführbar ist. Die zusätzliche Verwendung von Opazitäten mit höherem Anteil von Alpha-Elementen kann diese Altersdifferenz im entsprechenden Fall jedoch wieder erheblich reduzieren. Im Falle von metallarmen Sternen ergibt sich ebenfalls eine Verjüngung der Sternalter, die vollständig durch die Diffusion und zusätzlich durch die Zustandsgleichung bestimmt wird. Eine eventuelle Anreicherung der Opazitäten mit Alpha-Elementen spielt nur noch eine untergeordnete Rolle. Allgemein verringern sich mit abnehmender Metallizität die Sternalter.

Abschließend lassen sich die wichtigsten Erkenntnisse aus den vorhergehenden Abschnitten, sowie den Tabellen 4.3 und 4.4 zu folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Es macht keinen Sinn, Sternalter ohne vorhergehende Kalibrierung der physikalischen Prozesse an der Sonne zu bestimmen.
2. Aus dem Vergleich von verschiedenen Entwicklungsrechnungen unterschiedlicher Autoren können kaum Rückschlüsse über die Modellphysik und deren Gültigkeit gewonnen werden, da meist unterschiedliche physikalische Eingangsdaten (Opazitäten, Zustandsgleichung, Diffusion, usw.) verwendet werden.
3. Eine möglichst gute Bestimmung von chemischen Häufigkeiten, insbesondere auch der Alpha-Elemente, ist bei den Sternen unerlässlich. Sternentwicklungsrechnungen ohne Berücksichtigung detaillierter Häufigkeiten in den Massenbruchteilen können erhebliche Altersabweichungen aufweisen.
4. Aufgrund der Ergebnisse aus einer konsistenten Modellierung von Sternatmosphäre und Sterninnerem folgt nach Möglichkeit die Verwendung der aktuellsten Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994) und von Iglesias & Rogers (1996). Außerdem sollte das Konvektionsmodell von Canuto & Mazzitelli (1992) verwendet werden.
5. Sowohl die unbekannte Heliumhäufigkeit, als auch die Zustandsgleichung stellen Unsicherheitsfaktoren dar, die zu einer weiteren Verjüngung der Sternalter führen können.

Tabelle 4.3 Quantitative Gegenüberstellung der maximalen Auswirkungen unterschiedlicher Modellphysik auf die Altersbestimmung bezogen auf die Referenzmodelle in der Turn-off-Region. Die Tabelle gibt die Altersunterschiede in Milliarden Jahren für unterschiedliche Sternmassen in Einheiten der Sonnenmasse und chemische Häufigkeiten an (vgl. Zeile *Modellsatz*). So bedeutet beispielsweise -0.3 um maximal 300 Millionen Jahre geringere Sternalter gegenüber dem Referenzmodellsatz. Die erreichbaren Altersgenauigkeiten wurde unter *Referenz* angegeben. Für den Modellsatz *Atmos* sind die Altersänderungen nicht auf das Referenzmodell, sondern auf den Modellsatz *CM+O92+AF* bezogen, ebenso wie *O96+AF+O α* sich auf einen Modellsatz *O96+AF* mit 0.40 dex höherer Häufigkeit an Alpha-Elementen bezieht, so daß nur die Auswirkungen der mit Alpha-Elementen angereichert Opazitäten gegenüber Opazitäten mit solarer Mischung tabelliert sind. Änderungen unter 100 Millionen Jahren wurden nicht mehr angegeben und falls die Modellrechnungen nicht durchführbar waren wurde k.A. für *keine Angaben* eingefügt. Bei Altersdifferenzen über zwei Milliarden Jahren sind die Angaben nur noch auf 500 Millionen Jahre genau, da sich hier der genaue Ort des Verweiches der Entwicklungswege am Turn-off auf das Alter auswirkt. Modellabkürzungen: O92=Opazitäten von Rogers & Iglesias (1992) O96=Opazitäten von Iglesias & Rogers (1996), AF=kühle Opazitäten von Alexander & Ferguson (1994), CM=Konvektion nach Canuto & Mazzitelli (1992), Atmos=Atmosphärenmodelle als äußere Randbedingung, EOS=Zustandsgleichung von Rogers, Swenson & Iglesias (1996), Eichung=geänderte Eichbedingung, AG89=Massenbruchteile auf der Grundlage von Anders & Grevesse (1989), HDif=Helium Diffusion, MDif=Metalldiffusion

Modellsatz	α	Y	[Fe/H]=0.0			[Fe/H]=-2.0		
			1.0	0.9	0.8	0.9	0.8	0.7
Referenz	1.587	0.2732	~ 1	~ 2	~ 3	~ 0.7	~ 1.4	~ 2
O92+AF	1.615	0.2730	+0.1	+0.4	+1.9	-	-0.2	-0.5
O96+AF	1.603	0.2739	-	+0.4	+1.9	-0.3	-0.5	-0.9
CM	0.811	0.2732	+0.5	+0.1	-1.7	-	-	+0.3
CM+O92+AF	0.834	0.2730	+0.6	+0.5	+0.2	-	-0.2	-0.2
Atmos	0.838	0.2730	-	-	+0.1	+0.2	+0.6	+0.8
EOS	1.609	0.2667	+0.1	-0.3	k.A.	-0.4	-0.7	-1.4
Eichung	1.587	0.2723	-	-	-	+0.1	+0.1	+0.2
AG89	1.607	0.2789	-	-	-	+0.1	+0.2	+0.4
O96+AF+O α	1.603	0.2739	+4.0	+6.5	+11	+0.2	+0.3	+0.5
HDif	1.587	0.2732	-1.3	-2.5	-4.0	k.A.	-2.5	-3.5
MDif	1.587	0.2732	-1.3	-2.5	-4.0	k.A.	-2.5	-3.5

Tabelle 4.4 Quantitative Gegenüberstellung der maximalen Auswirkungen unterschiedlicher Elementhäufigkeiten auf die Altersbestimmung bezogen auf die Referenzmodelle in der Turn-off-Region. Die Altersunterschiede entsprechen der Tabelle 4.3 hier für unterschiedliche Sternmassen in Einheiten der Sonnenmasse und chemische Häufigkeiten (vgl. Zeile *Modellsatz*). Die Modellabkürzungen bedeuten: ΔM =Häufigkeitsvariation für Metalle, $[\alpha/\text{Fe}]$ =Anreicherung von Alpha-Elementen, Y=Helium mit festgesetzten Massenbruchteil.

Modellsatz	[Fe/H]=0.0			[Fe/H]=-1.0			[Fe/H]=-2.0		
	1.0	0.9	0.8	0.9	0.8	0.7	0.9	0.8	0.7
Referenz	~ 1.0	~ 2.0	~ 3.0	~ 0.5	~ 1.0	~ 1.5	~ 0.7	~ 1.4	~ 2.0
$\Delta M=+0.05$	-1.0	-1.7	-3.0	-0.5	-0.7	-0.9	-	-	-
$\Delta M=+0.10$	-1.5	-2.5	-4.5	-1.0	-1.2	-1.7	-0.2	-0.3	-0.4
$[\alpha/\text{Fe}]=+0.20$	-2.0	-4.0	-7.0	-1.2	-1.7	-3.0	-0.3	-0.6	-0.9
$[\alpha/\text{Fe}]=+0.40$	-4.5	-7.5	-13	-2.5	-5.0	-7.0	-0.9	-1.3	-2.0
$[\alpha/\text{Fe}]=+0.60$	-9.5	-10	<-15	-4.5	-8.5	<-15	-1.8	-3.0	-4.0
Y=0.2500	-0.9	-1.6	-3.0	-0.5	-1.0	-1.9	-0.5	-0.9	-1.8
Y=0.2300	-2.5	-4.0	-7.0	-1.3	-2.5	-4.0	-0.5	-1.2	-2.0

6. Die Verringerung der Sternalter wird durch die Diffusion nach Bahcall, Thoul & Loeb (1994) dominiert. Im Hinblick auf eine verbesserte Tiefe der Konvektionszone in den Modellen, bezogen auf die Ergebnisse von helioseismologischen Untersuchungen, folgt die notwendige Miteinbeziehung der Heliumdiffusion in die Sternentwicklung. Im Fall der Metalldiffusion ist für zu hohe Sternmassen die Metallizitätsabnahme jedoch sehr wahrscheinlich zu groß.

In den obigen Punkten sind die wesentlichen Forderungen, die sich aus den Untersuchungen dieser Arbeit ergaben zusammengefaßt. Darüber hinaus soll aber auch ein Einblick in die praktischen Auswirkungen der bisherigen Untersuchungen auf die Bestimmung von Sternalter gegeben werden. Zu diesem Zweck werden im nächsten Kapitel die Alter für einige ausgewählte Sterne bestimmt.

5. Anwendungen

Um bei der Bestimmung stellarer Parameter eine hohe Genauigkeit zu erzielen hat es sich als günstige Voraussetzung erwiesen, beobachtete Spektren mit gutem Signal zu Rausch Verhältnis ($S/N > 200$) und hoher Auflösung ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda} > 50000$) zu verwenden, die nach Möglichkeit noch eine große spektrale Überdeckung aufweisen. Seit 1997 werden diese Anforderungen mit Hilfe des *Fibre Optics Cassegrain Echelle Spektrograph (FOCES)* erreicht und übertroffen. Das Instrument wurde von mehreren Mitgliedern der Arbeitsgruppe *Kühle Sterne* an der Universitätssternwarte München entwickelt, gebaut und schrittweise verbessert. Derzeit wird es am 2.2m Teleskop auf dem Calar Alto in Spanien betrieben und kann dort als bester High-Resolution-Spektrograph bezeichnet werden. Mit Hilfe dieses Spektrographen wurden bisher weit über 1000 Spektren gewonnen und im Folgenden werden Anwendungen von Sternentwicklungsrechnungen auf einige Ergebnisse von ausgewählten Sternspektren präsentiert. Die dabei vorgestellten Altersbestimmungen der einzelnen Sterne zerfallen im Wesentlichen in zwei sehr unterschiedliche Klassen.

Einerseits werden Sterne in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe betrachtet. Es wird sich zeigen, daß die erreichbare Altersgenauigkeit für Sterne in dieser Region des Hertzsprung-Russell-Diagramms äußerst schlecht ist. Jedoch ist eine möglichst genaue Ermittlung von Altern in diesem Fall auch nicht das primäre Ziel. Vielmehr kann durch die Lage der Sterne in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe überprüft werden, ob theoretische Modelle mit der beobachteten Nullalter-Hauptreihe übereinstimmen. Lassen sich die Positionen von beobachteten Sternen im Hertzsprung-Russell-Diagramm durch Entwicklungswege in keinem Fall erreichen, so würde ein fundamentales Problem in der Modellbildung vorliegen. Aber auch im Hinblick auf theoretische Weltmodelle und den hieraus gewonnenen Obergrenzen für das sogenannte Weltalter können anhand der Nullalter-Hauptreihe weitere Erkenntnisse gewonnen werden. Beispielsweise könnte aufgrund der kosmologischen Modelle angenommen werden, daß alle beobachtbaren Sterne nicht älter als 15 Milliarden Jahre sind. Würden nun Sterne gegenüber der theoretischen Nullalter-Hauptreihe zu hohe Leuchtkräfte oder zu geringe Schwerebeschleunigungen besitzen, also Alter deutlich über 15 Milliarden Jahre aufweisen, dann wäre auch dies ein Hinweis auf Probleme der Modellbildung. Somit wären entweder die Modellrechnungen der Sternentwicklung, die Bestimmung der stellaren Parameter, oder die kosmologischen Modelle fehlerhaft. Darüber hinaus ließe sich die Sternentwicklungsrechnung unter der Annahme korrekter kosmologischer Modelle anhand der beobachtbaren Nullalter-Hauptreihe anstelle der Position der heutigen Sonne eichen. Diese Idee gewinnt insbesondere Bedeutung, sobald sich die Eingangsparameter der Sternentwicklung deutlich von den Eingangsparametern der Sonnenmodelle entfernt haben. Besser wäre jedoch zweifellos die Modellbildung so weit voranzutreiben, daß etwaige Diskrepanzen beseitigt werden.

Andererseits lassen sich auch Altersbestimmungen in der Region um den Turn-off gewinnen. Hierbei können sehr hohe Altersgenauigkeiten erzielt werden. Es wird sich zeigen, daß insbesondere Sterne in der Hertzsprung-Lücke zum Gewinn weiterer Erkenntnisse geeignet sind. Ganz allgemein lassen sich jedoch aussagekräftige Informationen erst durch die Betrachtung einer **großen Anzahl von Sternen** gewinnen, da sich erst dann ein fundiertes, nicht mehr durch einzelne *Ausreißer* gestörtes Bild ergibt. Insofern sind die folgenden Anwendungen als erste Beispiele für weitere mögliche Arbeiten zu betrachten.

5.1 Sterne in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe

Für vier Sterne unterschiedlicher Metallizität werden detaillierte Entwicklungsrechnungen vorgestellt. Dabei wurde besonderer Wert auf die Frage gelegt, wie sich Alter und Massen der Sterne ändern, wenn gegenüber den Referenzmodellen als **neuer Standard** die Anreicherung der Alpha-Elemente in den Massenbruchteilen, die Diffusion von Helium, aktuelle Opazitäten sowie Konvektion von Canuto & Mazzitelli mit Modellatmosphären in den Entwicklungsrechnungen verwendet werden.

In der Diplomarbeit *Spektroskopische Untersuchung alter metallarmer Halosterne* wurden von Grupp (1997) für drei metallarme Sterne sowohl die stellaren Parameter, als auch Sternalter und Sternmassen mit Entwicklungswegen von VandenBerg (1985) ermittelt (vgl. Tabelle 5.1 oben). Daneben hat Fuhrmann (1998) in seiner Arbeit *Nearby stars of the Galactic disk and halo* unter vielen anderen Sternen auch die stellaren Parameter von Groombridge 1830 bestimmt (vgl. Tabelle 5.1 unten). Da dieser Stern vielfach als *Kontrollstern* für die Lage der Nullalter-Hauptreihe verwendet wird, bot er sich als viertes Beispiel an.

Schließlich sind in einzelnen Fällen auch die Ergebnisse der neuen Entwicklungsmodelle von VandenBerg (2000) in die Diagramme eingetragen. Diese Modelle besitzen eine andere Zustandsgleichung und **keine** Diffusion von Helium oder den Metallen. Eine Rückführung von Altersunterschieden zwischen den Ergebnissen nach VandenBerg (2000) und den Modellrechnungen dieser Arbeit auf die Modellphysik ist aber allein aufgrund der unterschiedlichen Programme bereits unmöglich. Die Angaben dienen vielmehr der Vermittlung eines Eindrucks, wie weit sich diverse Modellrechnungen derzeit unterscheiden können.

Tabelle 5.1 Spektroskopische Parameter, sowie Alter und Massen nach VandenBerg (1985) der untersuchten Sterne in der Diplomarbeit von Grupp (1997) (Die bolometrische Helligkeit wurden analog zu Fuhrmann (1998) ermittelt) und die spektroskopischen Parameter von Groombridge 1830 (HD 103095) aus Fuhrmann (1998).

Objekt	T_{eff} [K]	$\log g$ [cgs]	[Fe/H]	[Fe/ α]	M_{bol} [mag]	Masse [$M_{\odot}$]	Alter [Gyr]
G 74-5	5742 $\pm$ 50	4.60 $\pm$ 0.03	-0.93 $\pm$ 0.05	-0.32 $\pm$ 0.01	4.81 $\pm$ 0.08	0.76 $\pm$ 0.03	5 $\pm$ 4
G 212-7	5518 $\pm$ 50	4.62 $\pm$ 0.03	-1.66 $\pm$ 0.08	-0.28 $\pm$ 0.02	5.81 $\pm$ 0.08	0.68 $\pm$ 0.04	21 $\pm$ 6
G 246-38	5343 $\pm$ 50	4.70 $\pm$ 0.03	-2.17 $\pm$ 0.06	-0.21 $\pm$ 0.01	5.85 $\pm$ 0.08	0.67 $\pm$ 0.04	14 $\pm$ 7
HD 103095	5110 $\pm$ 80	4.66 $\pm$ 0.10	-1.35 $\pm$ 0.10	-0.28 $\pm$ 0.05	6.33 $\pm$ 0.05		

5.1.1 Der Stern G 74-5

Abbildung 5.1 oben zeigt die Entwicklungswege die sich mit Referenzbedingungen ergeben. Der Stern wäre für diesen Fall etwa 11 Milliarden Jahre alt und hätte 0.69 Sonnenmassen. Dem gegenüber zeigt der unteren Teil der Abbildung Entwicklungswege mit oben erklärtem *neuen Standard*. Danach ergibt sich ein 5.6 Milliarden Jahre alter Stern, der sich also mit den Angaben von VandenBerg (1985) deckt.

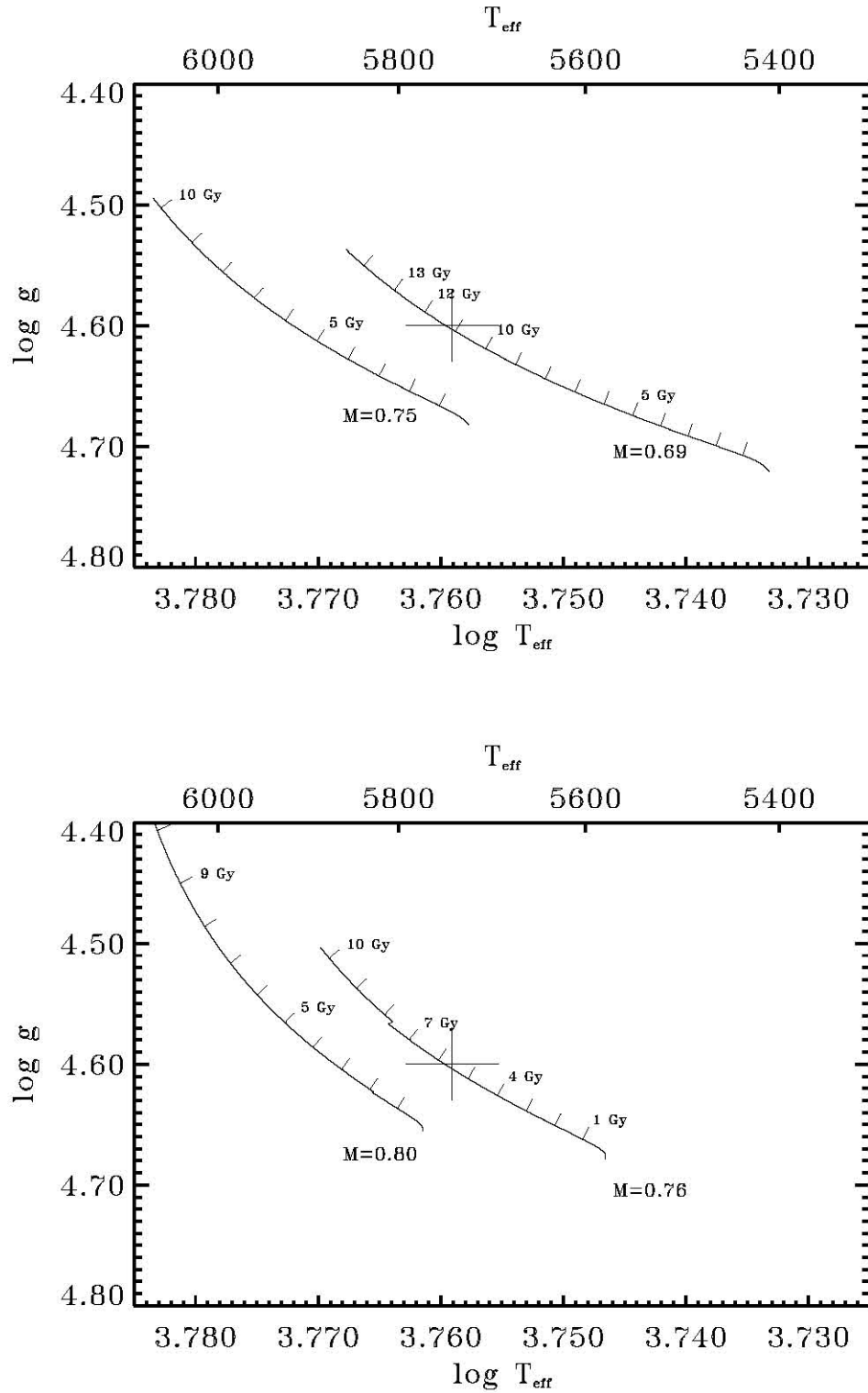


Abbildung 5.1 Entwicklungswege für G 74-5. **Oben:** Mit Modellphysik aus den Referenzbedingungen ergibt sich ein Alter von 11.2 Milliarden Jahren und 0.69 Sonnenmassen. **Unten:** Entwicklungswege mit *neuem Standard* führen zu einem 5.6 Milliarden Jahre alten Stern mit 0.76 Sonnenmassen (Der Altersfehler liegt bei etwa 2.5 Milliarden Jahren).

Allerdings wurde noch nicht beachtet, daß die Modellrechnungen von VandenBerg (1985) mit einer festen Mischungsweglänge von $\alpha = 1.6$ und einem Massenbruchteil von $Y=0.25$ für Helium berechnet wurden, während die abgebildeten Entwicklungsrechnungen an der heutigen Sonne mit den Parametern $\alpha_{cm} = 0.886$ und $Y=0.2723$ geeicht wurden.

Nachdem der Stern G 74-5 kein extrem metallarmer Stern ist, wurden die Entwicklungsrechnungen auch für einen Massenbruchteil von $Y=0.26$ für Helium durchgeführt. Wie Abbildung 5.2 zeigt, verringert sich das Alter des Sterns von 5.6 Milliarden Jahren auf 5.2 Milliarden Jahre. In Anbetracht eines Fehlers für das Alter von etwa 2.5 Milliarden Jahren aufgrund der Unsicherheit der spektroskopischen Parameter, ist die Auswirkung eines geringeren Massenbruchteils für Helium relativ bedeutungslos. Einzig die Sternmasse steigt als Folge um zwei Hundertstel der Sonnenmasse an. Aus der geänderten Modellphysik zwischen den Referenzmodellen und dem *neuen Standard* ergibt sich demnach eine Verringerung des Sternalters von G 74-5 um etwa 6 Milliarden Jahre.

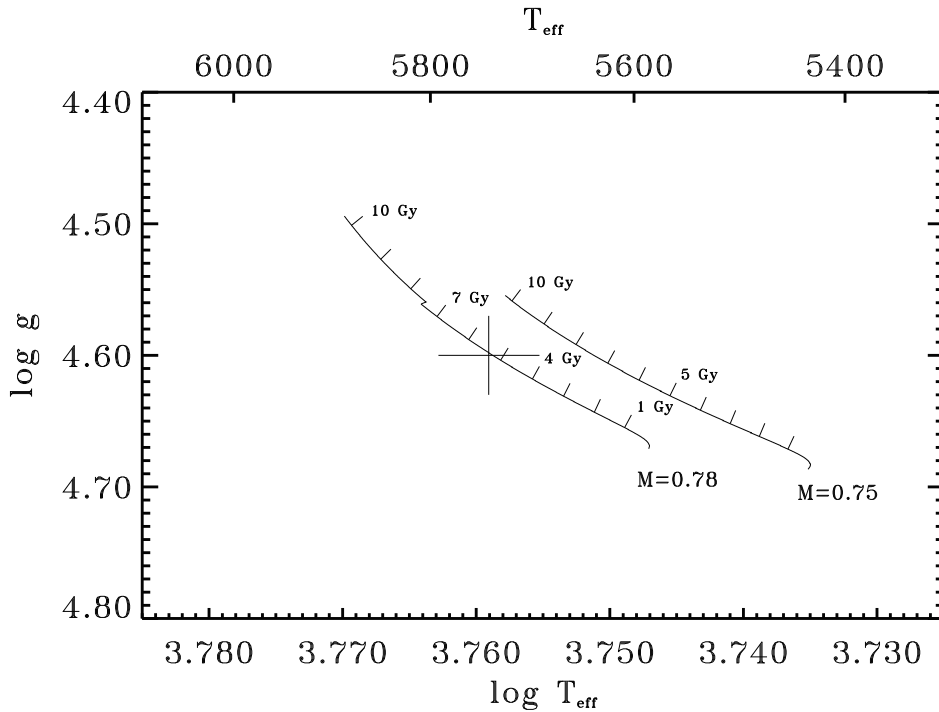


Abbildung 5.2 Entwicklungswege für G 74-5 mit einem Massenbruchteil $Y=0.26$ für Helium. Demnach hätte der Stern ein Alter von 5.2 Milliarden Jahren und eine Masse von 0.78 Sonnenmassen.

Es stellt sich unmittelbar die Frage, warum VandenBerg (1985) auch ohne Diffusion und mit älteren Opazitäten das geringere Sternalter ermitteln konnte. Dies war nur möglich, indem die Modellrechnungen von VandenBerg (1985) **nicht** an der heutigen Sonne geeicht waren. Vielmehr wurde ein Parametersatz für die Mischungsweglänge und den Massenbruchteil des Heliums verwendet, der für die beobachtbaren Farben-Helligkeitsdiagramme von Kugelsternhaufen eine möglichst optimale Anpassung der Isochronen an die Beobachtung erlaubte. Daraus resultiert jedoch eine gewisse Unsicherheit bei der Bestimmung von Sternaltern auf der Grundlage derartiger Entwicklungswege. Erst in der Publikation VandenBerg (2000) erfolgte eine Eichung an der heutigen Sonne. Jedoch wurde speziell in dieser Arbeit ein anderer Unsicherheitsfaktor eingeführt.

Tabelle 5.2 Alter und Massen für G 74-5 aus den unterschiedlichen Entwicklungsmodellen.

Modell	Alter [Gy]	Masse [$M_{\odot}$]
Referenz	11.2 ± 3	0.69 ± 0.02
neuer Standard (nS)	5.6 ± 2.5	0.76 ± 0.02
nS mit $Y=0.260$	5.2 ± 2.5	0.78 ± 0.02
nS mit $[\alpha/\text{Fe}] = +0.40$	9.3 ± 3	0.72 ± 0.02

Die Effektivtemperaturen wurden in photometrische Farbindizes umgewandelt. Die Transformation ist jedoch von theoretischen Modellatmosphären abhängig, die ihrerseits nicht unproblematisch sind. So reproduzieren die theoretischen Flußspektren von Modellatmosphären keineswegs den gesamten Spektralbereich von beobachtbaren Sternen, wie etwa der Sonne. Die Entwicklungswege von VandenBerg (2000) sind aber auch in nicht transformierter Form verfügbar, wie noch zu sehen sein wird.

Die Abbildung 5.3 zeigt den Einfluß von Opazitäten mit um 0.4 dex erhöhtem Anteil der Alpha-Elemente. Es wird offensichtlich, daß die Berücksichtigung der korrekten Opazitäten in diesem Fall eine größere Rolle spielt, als die Wahl eines speziellen Massenbruchteils für Helium. Einen Überblick der Ergebnisse zeigt Tabelle 5.2. Insgesamt folgt für Modelle mit geringerem Heliummassenbruchteil und höherem Anteil an Alpha-Elementen ein Alter von 8.4 Milliarden Jahren und eine Masse von 0.75 Sonnenmassen.

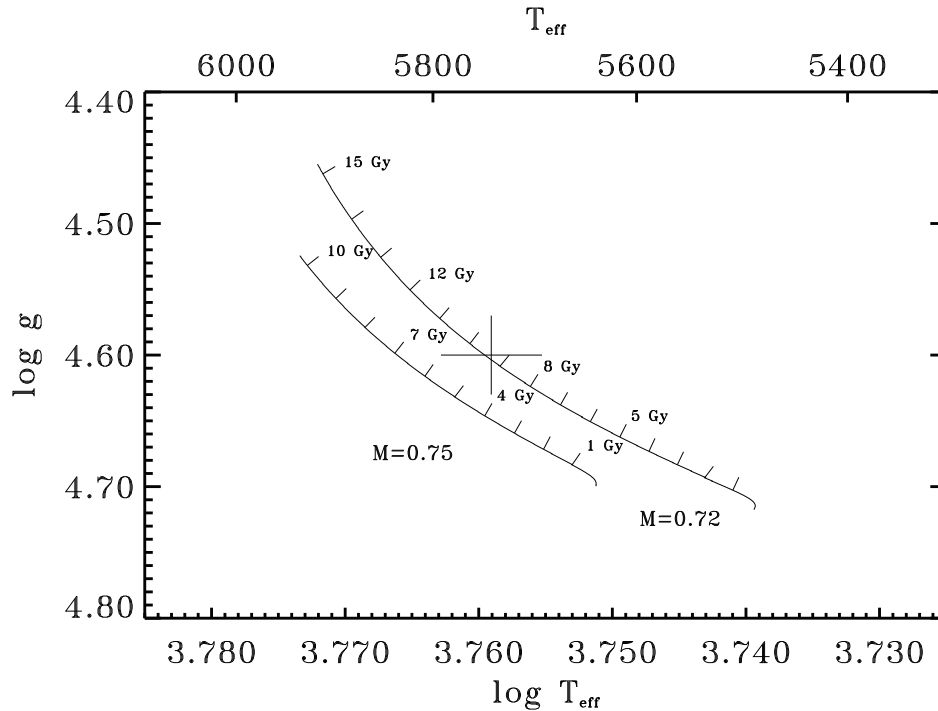


Abbildung 5.3 Entwicklungswege für G 74-5. Für beide Entwicklungswege wurden Opazitäten mit angereicherten Häufigkeiten für die Alpha-Elemente verwendet ($[\alpha/\text{Fe}] = 0.40$). In diesem Fall wird das Alter auf 9.3 Milliarden Jahre berechnet. Der Stern besitzt jedoch einen etwas weniger hohen Anteil an Alpha-Elementen. Nachdem die Differenz der obigen Entwicklungswege zum neuen Standard in Abbildung 5.1 unten 3.7 Milliarden Jahre beträgt, würde sich unter der Annahme einer linearen Beziehung zwischen Änderung des Sternalters und der Anreicherung mit Alpha-Elementen für G 74-5 ein Alter von 8.6 Milliarden Jahre anstelle der 9.3 Milliarden Jahre ergeben.

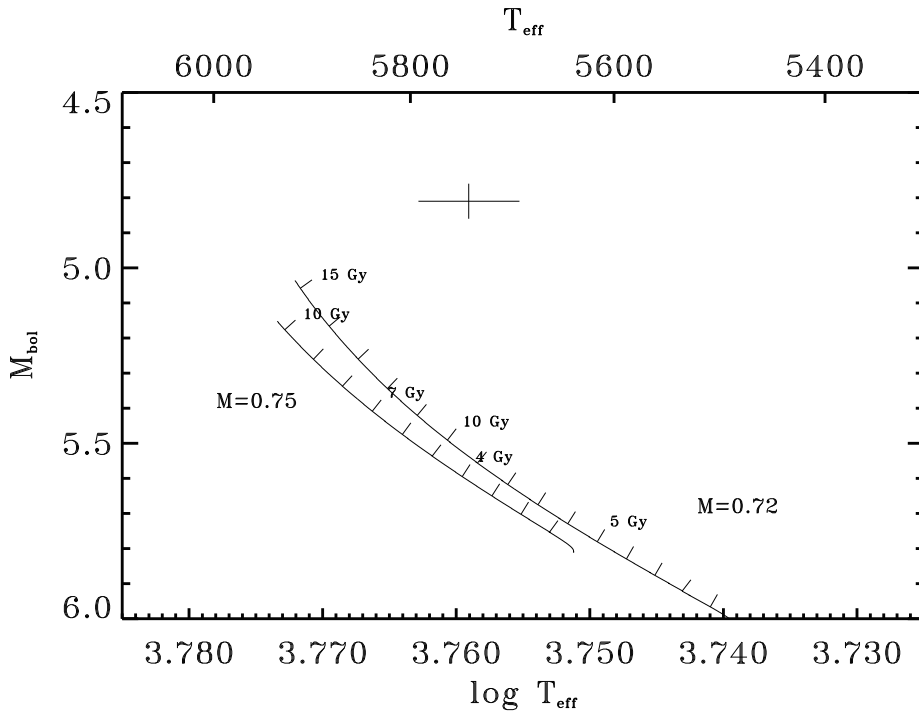


Abbildung 5.4 Entwicklungswege für den Stern G 74-5, die identisch zur Abbildung 5.2 sind, jedoch nun mit bolometrischer Helligkeit angetragen wurden. Für den Stern selbst wurde dagegen die bolometrische Helligkeit ermittelt, die sich mit Hilfe der Parallaxe des HIPPARCOS-Satelliten ergibt. Es wird deutlich, daß sich die relative Lage des Sterns zu den Entwicklungswegen geändert hat. Wird davon ausgegangen, daß die durch HIPPARCOS bestimmte Parallaxe des 56.6 Parsec entfernten Sterns mit einem relativen Fehler von 7.3 % eine sehr hohe Genauigkeit besitzt, so kann auf eine fehlerhafte Bestimmung der spektroskopischen Parameter geschlossen werden.

Anstelle der spektroskopisch ermittelten Schwerebeschleunigung kann für G 74-5 mit Hilfe der von HIPPARCOS bestimmten Parallaxe auch die bolometrische Helligkeit ermittelt werden. Damit läßt sich der Stern in ein geändertes Hertzsprung-Russell-Diagramm nach Abbildung 5.4 eintragen.

Aus dem Diagramm wird erkennbar, daß die spektroskopisch ermittelten stellaren Parameter - insbesondere die Schwerebeschleunigung - fehlerhaft sind, wenn von einer guten Bestimmung der Parallaxe für den Stern ausgegangen wird. Grupp (1997) ermittelte als spektroskopische Parallaxe 23.1 Millibogensekunden, während von HIPPARCOS 17.66 Millibogensekunden als trigonometrische Parallaxe bestimmt wurde. Bei der in Abbildung 5.4 gegebenen Lage von G 74-5 im Hertzsprung-Russell-Diagramm würde sich ein Alter von mehr als 25 Milliarden Jahre für den Stern ergeben. Dies ist ein Befund, der auch bei den folgenden Sternen in Nähe der Nullalter-Hauptreihe zu finden sein wird.

5.1.2 Der Stern G 212-7

Wie aus Abbildung 5.5 entnommen werden kann ergibt sich aus Modellrechnungen mit Referenzbedingungen ein Alter von über 30 Milliarden Jahren für den Stern. Allerdings zeigt auch Abbildung 5.6 oben für einen Entwicklungsweg mit *neuem Standard* selbst bei einem Massenbruchteil von $Y=0.25$ für Helium ein Alter von etwa 25 Milliarden Jahren.

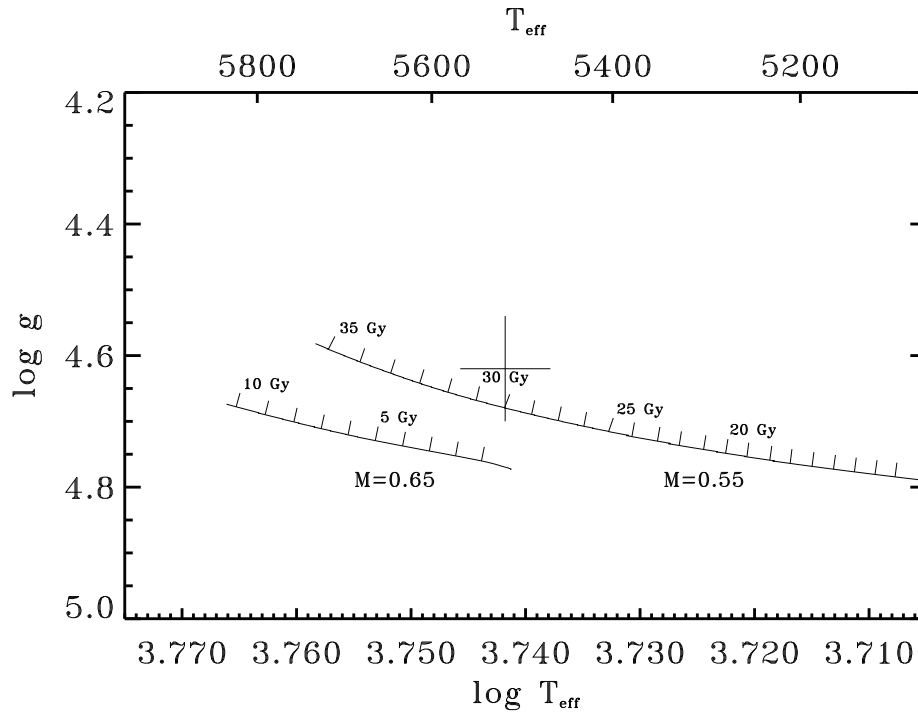


Abbildung 5.5 Entwicklungswege für G 212-7 mit Modellphysik aus den Referenzbedingungen. Es ergibt sich ein Alter von über 30 Milliarden Jahren.

Aus der Abbildung kann auch entnommen werden, daß sich die Altersbestimmung in etwa mit den Berechnungen von VandenBerg (2000) deckt, wobei er den geringeren Massenbruchteil $Y=0.236$ und eine höhere Metallizität von $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.61$, sowie um 0.30 dex übersolare Alpha-Element Häufigkeiten verwendet hat. Darüber hinaus ist gut erkennbar, daß die Unsicherheit der stellaren Parameter einen Altersbereich zwischen 10 und weit über 20 Milliarden Jahren für den Stern erlauben. In Abbildung 5.6 unten wird verdeutlicht, daß eine Berücksichtigung von Opazitäten mit 0.40 dex übersolarem Anteil an Alpha-Elementen mit etwa zusätzlich 3 Milliarden Jahren vergleichsweise vernachlässigbar zu Buche schlägt.

Schließlich wurde auch für diesen Stern die bolometrische Helligkeit mit Hilfe der HIPPARCOS Parallaxe von 14.24 ± 1.46 Millibogensekunden ermittelt. Werden die Entwicklungswege aus der Abbildung 5.6 oben ebenfalls mit den bolometrischen Helligkeiten angetragen, so ergibt sich die Abbildung 5.7. Nachdem sich die relative Lage des Sterns zu den beiden Entwicklungswegen gegenüber Abbildung 5.6 oben nur geringfügig geändert hat, sollte von Grupp (1997) auch eine spektroskopische Parallaxe bestimmt worden sein, die nicht sehr von der trigonometrischen Parallaxe abweicht. In der Tat findet sich in Grupp (1997) der Wert 13.7 Millibogensekunden als spektroskopische Parallaxe.

Das Alter von etwa 25 Milliarden Jahren stellt auch in diesem Beispiel einen außerordentlichen Widerspruch zu fast allen kosmologischen Weltmodellen dar. Während beim vorhergehenden Stern G 74-5 aufgrund des großen Unterschiedes zwischen trigonometrischer und spektroskopischer Parallaxe auf fehlerhafte stellare Parameter geschlossen werden konnte, stellt sich bereits hier die Frage nach weiteren Ursachen. Doch soll zuvor noch das nächste Beispiel in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe betrachtet werden.

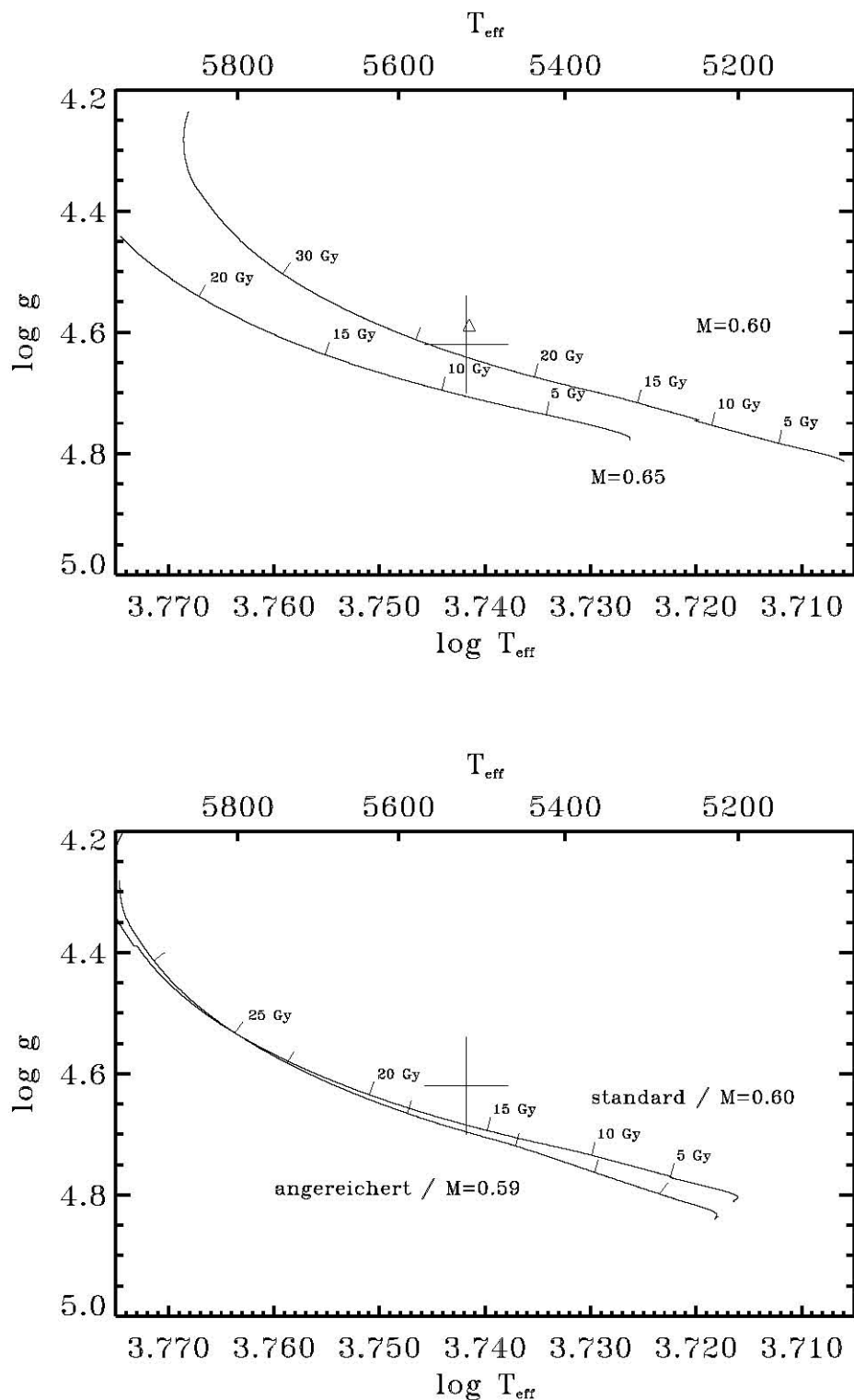


Abbildung 5.6 Entwicklungswege für G 212-7 mit *neuem Standard*. **Oben:** Bei 0.60 Sonnenmassen mit Heliummassenbruchteil $Y=0.25$ ist der Stern unter 25 Milliarden Jahren alt. Das Dreieck ist die Position eines Sterns gleicher Masse mit $Y=0.236$, $[\text{Fe}/\text{H}]=-1.61$ und einem Alter von 28.22 Milliarden Jahre von VandenBerg (2000). **Unten:** Für 0.59 Sonnenmassen mit um 0.40 dex an Alpha-Elementen angereicherten Opazitäten ergibt sich gegenüber 0.60 Sonnenmassen ohne angereicherten Opazitäten ein höheres Alter.

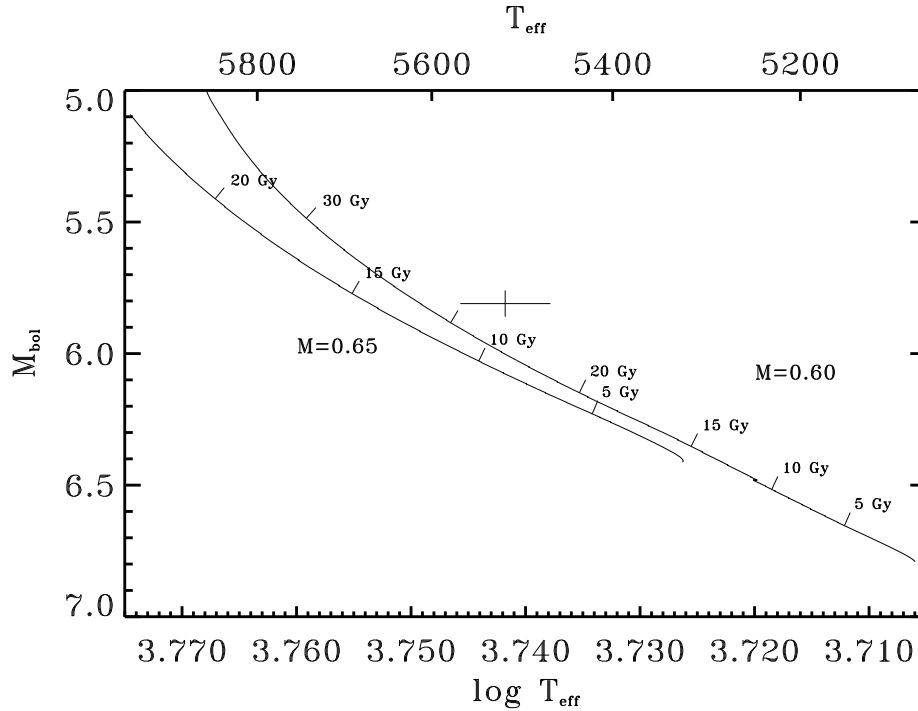


Abbildung 5.7 Entwicklungswege für den Stern G 212-7, die identisch zur Abbildung 5.6 oben sind, jedoch nun mit bolometrischer Helligkeit angetragen wurden. Für den Stern selbst wurde dagegen die bolometrische Helligkeit mittels der HIPPARCOS-Parallaxe ermittelt. Die relativen Lagen des Sterns zu den Entwicklungswegen weichen in dieser Abbildung gegenüber der Abbildung 5.6 (oben) kaum voneinander ab.

5.1.3 Der Stern G 246-38

Mit Entwicklungsrechnungen für den Stern G 246-38 unter Referenzbedingungen und einem Massenbruchteil von $Y=0.230$ für Helium ergeben sich weniger als 0.55 Sonnenmassen und ein Alter über 35 Milliarden Jahre für diesen Stern (vgl. Abbildung 5.8).

In Abbildung 5.9 oben wurden die Entwicklungsrechnungen mit *neuem Standard* und an der Sonne geeichter Heliumhäufigkeit durchgeführt, während dieselbe Abbildung unten den Sachverhalt mit einem Massenbruchteil von $Y=0.230$ für Helium darstellt. Aus dem Vergleich wird deutlich, daß unter der Annahme eines primordialen Heliummassenbruchteils ein um etwa 5 Milliarden Jahre geringeres Alter abgeleitet werden kann. Dennoch ergibt sich ein Alter von mindestens 25 Milliarden Jahren. Eine größere Heliumhäufigkeit würde zu noch höheren Altern führen. Aufgrund der Modellvorstellung, daß der heutige Heliumanteil im Weltall erst durch die Sterne erzeugt wurde und ebenso wie die Metalle durch Supernovaexplosionen im Weltall verteilt wurde, wird die Verwendung von geringen Heliummassenbruchteilen bei niedriger Metallizität gerechtfertigt.

Abbildung 5.9 unten zeigt außerdem, daß die Entwicklungswege von VandenBerg (2000) für diesen Stern in Nähe der Nullalter-Hauptreihe einen etwas flacheren Verlauf bezüglich einer Änderung der Schwerebeschleunigung aufweisen. Dies könnte im Wesentlichen durch die fehlende Diffusion und eine etwas andere Zustandsgleichung beeinflusst sein. Die Entwicklungswege von VandenBerg ergeben für diesen Stern ein etwas geringeres Alter.

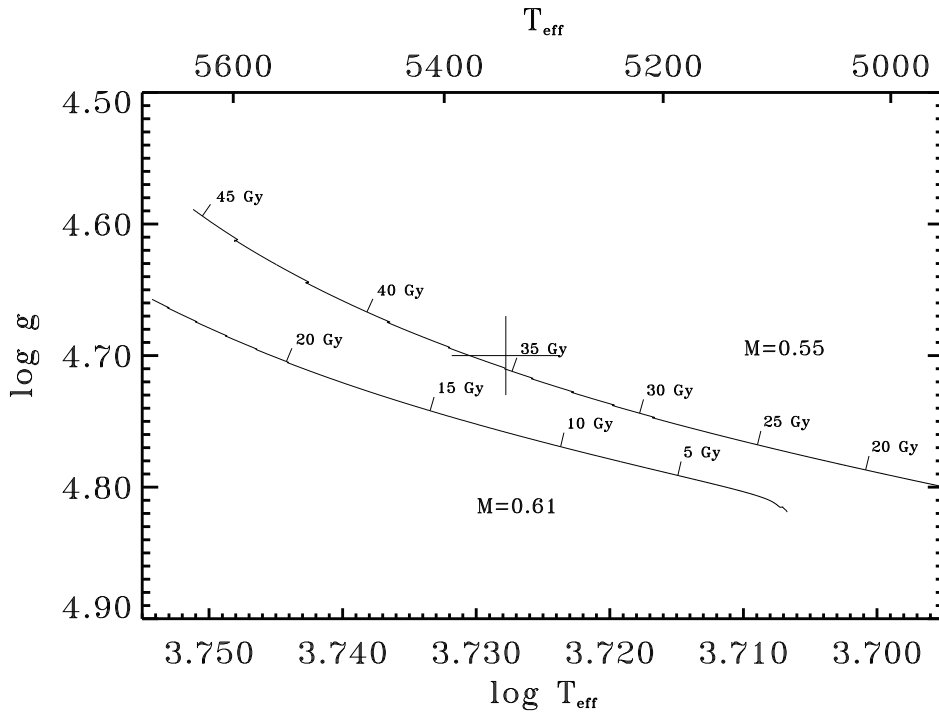


Abbildung 5.8 Entwicklungswege für G 246-38 mit Modellphysik aus den Referenzbedingungen und einem Massenbruchteil $Y=0.230$ für Helium. Es ergibt sich ein Alter von über 35 Milliarden Jahren.

Allgemein wird deutlich, daß auch hier eine Altersunsicherheit von über 20 Milliarden Jahren bestimmt werden kann. Dies bestätigt die am Anfang dieses Kapitels gemachte Aussage, daß Sterne mit hoher Schwerebeschleunigung zwar eine Begrenzung für die Lage der Nullalter-Hauptreihe definieren, doch keine solide Altersbestimmung erlauben.

In Abbildung 5.10 wurde erneut der Stern mit seiner bolometrischen Helligkeit aus der HIPPARCOS-Parallaxe in ein Hertzsprung-Russell-Diagramm eingetragen. Die beiden Entwicklungswege sind identisch mit den Wegen aus der Abbildung 5.9 unten. Die Änderung in der relativen Lage des Sterns zu den beiden Entwicklungswegen könnte in diesem Fall wieder mit schlechten spektroskopischen Parametern begründet werden. Während aus den Beobachtungen des HIPPARCOS-Satelliten eine trigonometrische Parallaxe von 17.58 ± 1.53 Millibogensekunden gewonnen wurde, ermittelte Grupp (1997) eine spektroskopische Parallaxe von 19.3 Millibogensekunden.

Insbesondere wird anhand von Abbildung 5.10 deutlich, daß sich der Stern sehr weit von der Nullalter-Hauptreihe entfernt befindet. In diesem Fall würde sich ein Alter von deutlich über 30 Milliarden Jahre ergeben. Legt man die Richtigkeit kosmologischer Modelle zugrunde, so müssten die Positionen der bisherigen Sterne im Hertzsprung-Russell-Diagramm jeweils bei etwa 200 Kelvin kühlerer Effektivtemperatur liegen. Dies läßt sich entweder auf Probleme der Sternentwicklung in diesen Bereichen zurückführen, oder die stellaren Parameter Effektivtemperatur und chemische Häufigkeit sind fehlerhaft bestimmt. Ein Hinweis auf Probleme in der Modellbildung auf der Seite der Modellatmosphären wird in der Arbeit von Grupp (1997) gegeben, da er die Schwerebeschleunigung mit verschiedenen Methoden bestimmt hat. Wird das *Ionisationsgleichgewicht* von FeI und FeII anstelle der *Methode der starken Linien* benutzt, so ergibt sich $\log g = 4.83 \pm 0.29$ im Gegensatz zu dem Wert 4.70 ± 0.03 aus der Tabelle 5.1.

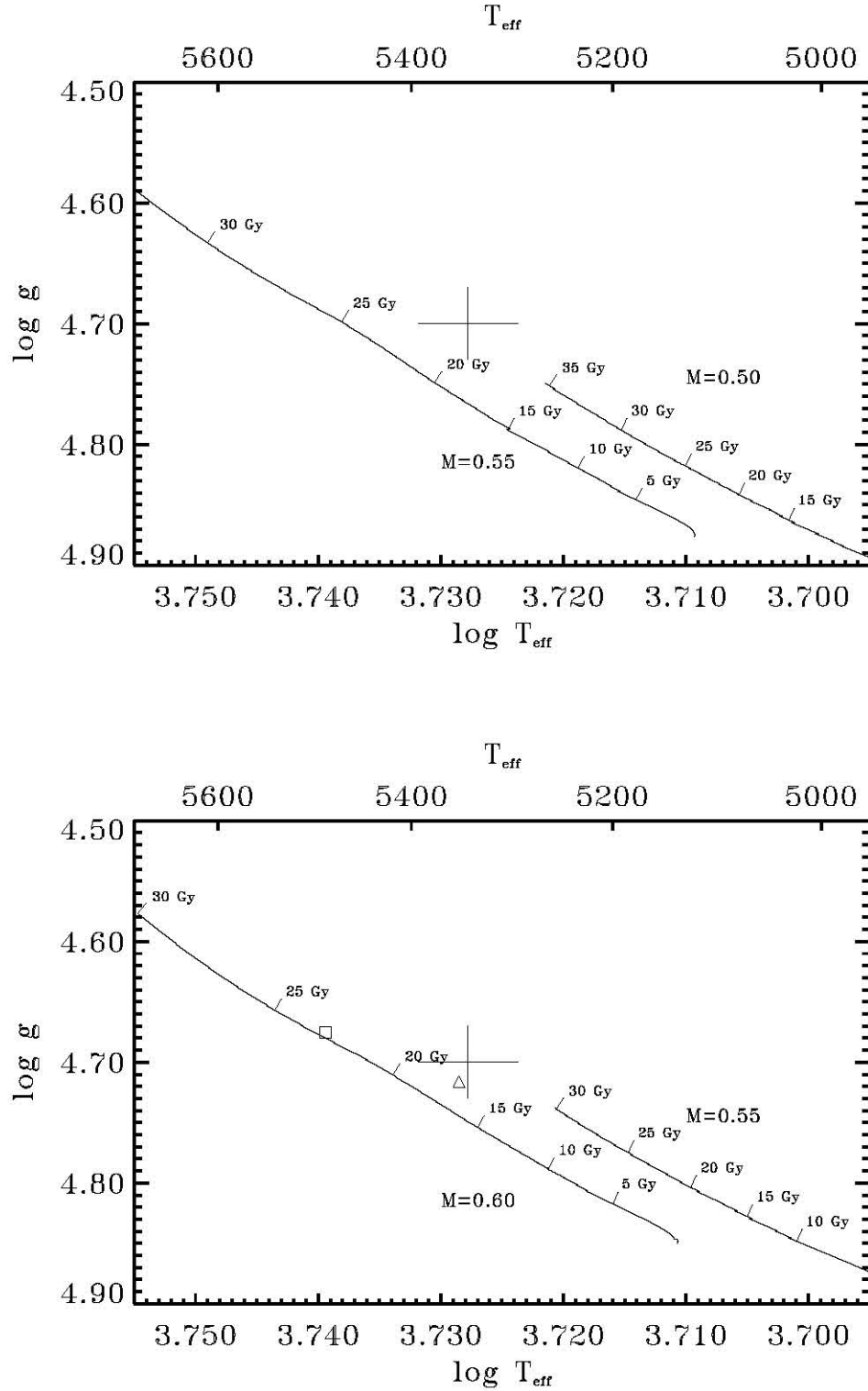


Abbildung 5.9 Entwicklungswege für G 246-38 mit *neuem Standard*. **Oben:** Durch Verbinden der Zeitmarken mit gleichem Alter kann ein Alter von mindestens 30 Milliarden Jahren abgelesen werden. **Unten:** Mit einem Heliummassenbruchteil $Y=0.230$ ergibt sich als Alter nicht unter 25 Milliarden Jahre. Die Positionen für 0.60 Sonnenmassen mit $Y=0.2352$, $[\text{Fe}/\text{H}]=-2.31$ und $[\alpha/\text{Fe}]=+0.30$ von VandenBerg (2000) sind bei 15.0 Milliarden Jahren als Dreieck und bei 20.2 Milliarden Jahren Alter als Quadrat eingetragen.

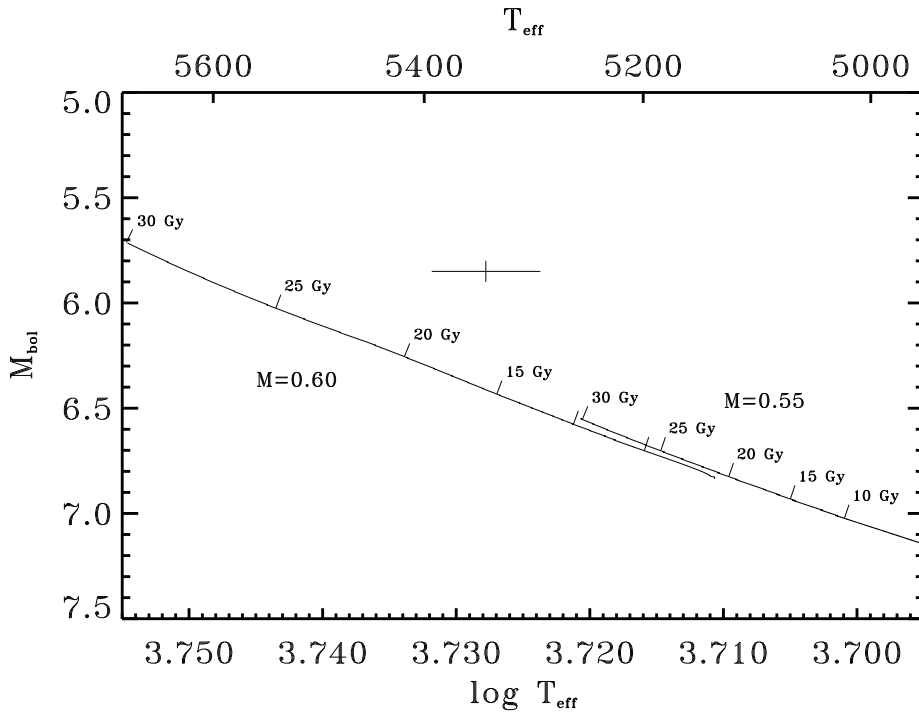


Abbildung 5.10 Entwicklungswege für den Stern G 246-38, die identisch zur Abbildung 5.9 unten sind, jedoch nun mit bolometrischer Helligkeit angetragen wurden. Für den Stern selbst wurde die bolometrische Helligkeit mittels der HIPPARCOS-Parallaxe ermittelt. Die relative Lage des Sterns zu den Entwicklungswegen hat sich gegenüber der Abbildung 5.9 (unten) deutlich geändert.

5.1.4 Groombridge 1830

Als letztes Beispiel für Sterne in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe wird HD 103095, auch bekannt als Groombridge 1830, beleuchtet. Wie in Abbildung 5.1.4 erkennbar ist, erreichen die Sternentwicklungsrechnungen mit der älteren Modellphysik die Position des Sterns nicht. Der Stern liegt deutlich über der theoretischen Nullalter-Hauptreihe und wäre nur durch einen Entwicklungsweg mit extrem niedriger Masse und einem Alter von über 80 Milliarden Jahren erreichbar. Insofern wird verständlich, warum Groombridge 1830 oftmals als *Kontrollstern* für die Lage der Nullalter-Hauptreihe verwendet wird.

Aus der Abbildung 5.11 kann entnommen werden, daß auch unter Verwendung von Modellen mit *neuem Standard* bei einem Alter von über 40 Milliarden Jahren ein zu hohes Sternalter im Bezug auf kosmologische Vorgaben auftritt. Zwar weisen die Modellrechnungen von VandenBerg (2000) geringere Alter auf, doch werden auch mit ihnen für den Stern über 25 Milliarden Jahre erreicht.

Eine Verringerung des Sternalters auf Seite der Sternentwicklung könnte nun mit unterschiedlichen Ansätzen erreicht werden. Beispielsweise könnten kühle Opazitäten eine Rolle spielen. Zur Klärung dieser Frage sind nun die Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels nützlich. Wird die Tabelle 4.3 betrachtet, so scheint eine Verbesserung der Opazitäten weniger erfolgversprechend. Vielmehr ist eine deutliche Verringerung des Alters einzig bei einer systematischen Verbesserung der Zustandsgleichung zu erwarten.

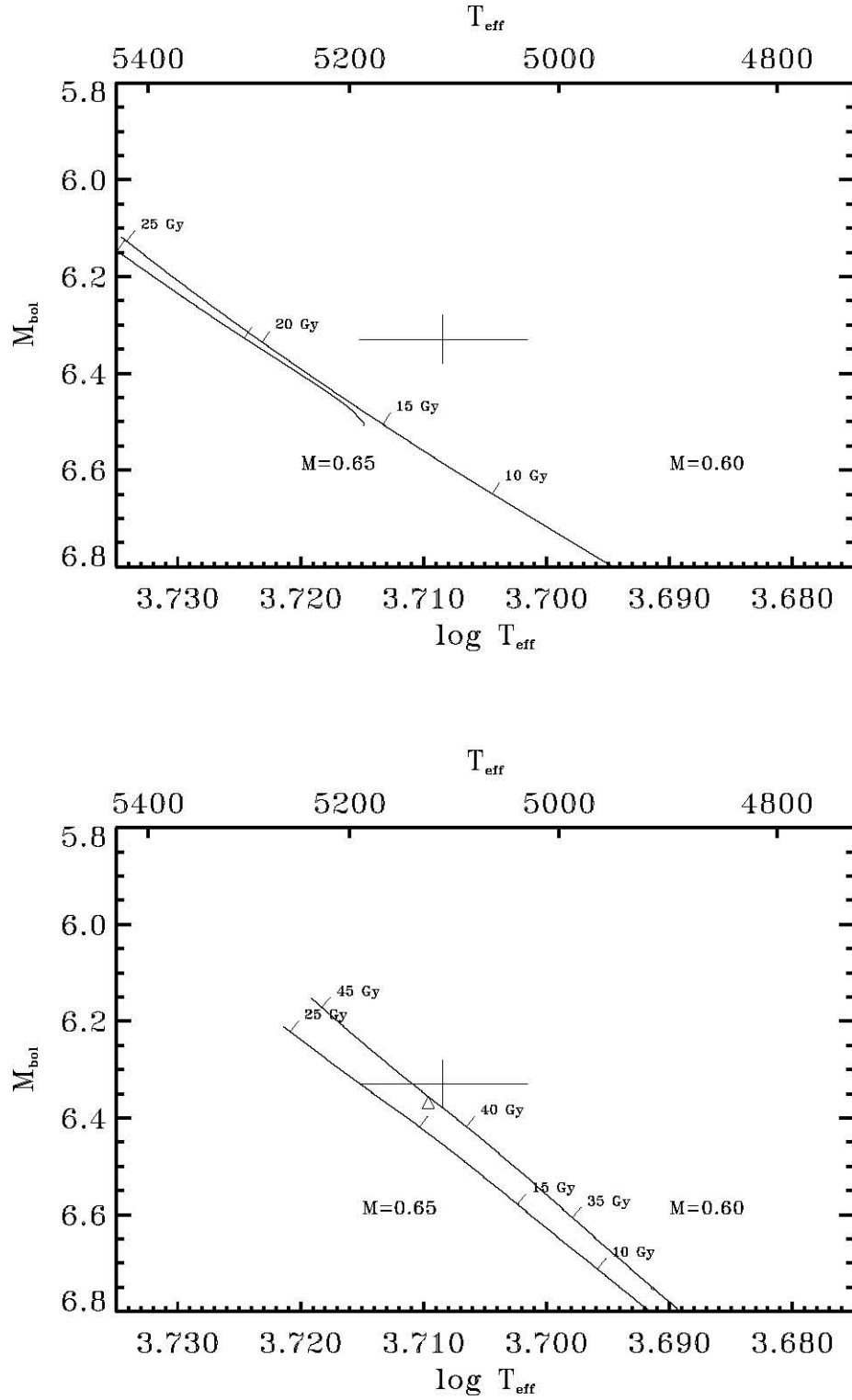


Abbildung 5.11 Entwicklungswege für HD103095 mit $Y=0.240$ als Heliummassenbruchteil für 0.60 und 0.65 Sonnenmassen. **Oben:** Bei Referenzbedingungen ergibt sich ein Sternalter von über 80 Milliarden Jahren. **Unten:** Mit *neuem Standard* wird der Stern über 40 Milliarden Jahre alt, jedoch mit über 25 Milliarden Jahren Unsicherheit. Als Dreieck ist ein Modell mit 21.7 Milliarden Jahre Alter für $Y=0.2370$, $[\text{Fe}/\text{H}]=-1.31$ und $[\alpha/\text{Fe}]=+0.30$ und 0.60 Sonnenmassen von VandenBerg (2000) eingetragen.

Eine Änderung in den anderen Bereichen der Modellphysik weist dagegen nur geringe Altersänderungen auf. Darüber hinaus wären zur Klärung der Ursachen für die vorhandene Altersproblematik weitere Entwicklungsrechnungen für mehrere hauptreihennahe Sterne vorteilhaft, da sich bei den vier betrachteten Sternen zwar ein systematischer Effekt andeutet, doch diese Beispiele zur Bildung von Lösungsansätzen noch zu wenige sind. Weitere stellare Parameter von Sternen in der Nähe der Nullalter-Hauptreihe sind von Fuhrmann bereits bestimmt. Insofern kann der hier als Beispiel einer Anwendung skizzierte Sachverhalt in der nahen Zukunft durchaus weiter verfolgt werden.

5.2 HR 7569 und die Entstehung der Dünnen Scheibe

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen die Möglichkeiten skizziert werden, die sich in der Nähe des Turn-offs mit **homogen ermittelten** stellaren Parametern und detaillierten Entwicklungsrechnungen ergeben. Seit mehreren Jahren bestimmt Fuhrmann aus FOCES-Spektren stellare Parameter für F-, G- und späte K-Sterne. Ziel dabei ist von möglichst allen Sternen der Dicken Scheibe bis zu etwa 25 Parsec Entfernung die stellaren Parameter zu ermitteln. Aufgrund der geographischen Breite des Calar Alto kann dabei etwa ein Drittel der Sterne nicht erfaßt werden (vgl. Fuhrmann, 1998). Dennoch haben die gewonnenen Daten den Vorteil, daß sie mit einem konstanten Verfahren von einer Person bestimmt wurden. Dies verringert die Streuung der stellaren Parameter, die sich durch unterschiedliche Verfahren und persönliche Beurteilung ergeben, deutlich.

Daneben stehen die astrometrischen Parallaxen des HIPPARCOS-Satelliten zur Verfügung, die eine wesentlich genauere Bestimmung der bolometrischen Helligkeit gegenüber der spektroskopischen Schwerebeschleunigung der beobachteten Sterne erlaubt (vgl. Fig.26 in Fuhrmann (1998)). Anhand der chemischen Zusammensetzung und unter Verwendung von kinematischen Daten kann eine Trennung der beobachteten Sterne in verschiedene Populationen erfolgen (vgl. Abbildung 5.12 aus Bernkopf, Fiedler, Fuhrmann (2001)).

Es stellt sich die Frage, ob die verschiedenen Populationen auch in unterschiedliche Altersklassen unterteilbar sind. Aus der Altersbestimmung der vorhandenen Sterne ergab sich bisher folgendes Bild. Von den Sternen der Dünnen Scheibe erweist sich 70 Virginis als der älteste Vertreter. Für diesen Stern sind neben zwei weiteren **alten** Vertretern der Dünnen Scheibe die stellaren Parameter in Tabelle 5.3 angeführt. Die Altersangaben der Tabelle ergeben sich aus detaillierten Entwicklungsrechnungen, die in den Abbildung 5.13 bis 5.16 dargestellt sind.

Aus allen Abbildungen wird deutlich, daß die besondere Lage der Sterne im Hertzsprung-Russell-Diagramm eine sehr präzise Altersbestimmung ermöglicht. Aufgrund der geringen Fehler in der bolometrischen Helligkeit der Sterne und dem schnellen Entwicklungsverlauf in der Hertzsprung-Lücke (dies wird in Abbildung 5.16 unten besonders deutlich) kann eine Altersbestimmung auf etwa eine Milliarde Jahre genau erfolgen. Die Tabelle 5.3 zeigt eine klare Trennung in drei verschiedene Altersklassen. Während die Sterne der Dünnen Scheibe mit ungefähr solarem $[\text{Fe}/\text{Mg}]$ -Verhältnis nicht älter als etwa 8 Milliarden Jahre sind, weisen die Sterne der Dicken Scheibe mit $[\text{Fe}/\text{Mg}] \approx -0.40$ alle ein Alter zwischen 12 und 14 Milliarden Jahren auf. Einzig der als Übergangstern klassifizierte HR 7569 ist etwa 9 Milliarden Jahre alt. Bisher konnten in den über 160 von Klaus Fuhrmann beobachteten Sternen nur vier Übergangsterne entdeckt werden.

Ergeben sich daraus Konsequenzen für die Entstehungsgeschichte unserer Milchstraße ?

Tabelle 5.3 Stellare Parameter von sieben sonnennahen *Schlüsselsternen*.

Objekt	T_{eff} [K]	$\log g$ [cgs]	[Fe/H]	[Fe/Mg]	M_{bol} [mag]	Masse [$M_{\odot}$]	Alter [Gyr]
109 Psc	5614±80	3.96±0.1	+0.10±0.06	+0.00±0.05	3.54±0.08	1.16±0.03	6.8±0.6
70 Vir	5481±70	3.83±0.1	-0.11±0.07	-0.08±0.05	3.50±0.06	1.07±0.03	8.1±0.6
μ Her	5592±70	3.94±0.1	+0.24±0.07	+0.00±0.05	3.64±0.05	1.17±0.05	7.0±0.7
HR 7569	5729±70	4.01±0.1	-0.17±0.08	-0.21±0.05	3.79±0.07	1.03±0.03	9.1±1.0
HR 173	5373±70	3.82±0.1	-0.64±0.07	-0.39±0.05	3.63±0.07	0.84±0.03	13.8±1.3
HD 10519	5710±70	4.00±0.1	-0.64±0.07	-0.43±0.05	3.84±0.12	0.85±0.04	13.5±1.3
HD 222794	5623±70	3.94±0.1	-0.69±0.07	-0.40±0.05	3.66±0.08	0.86±0.03	12.5±1.1

Sollte das vorhandene Bild bestehen bleiben, so kann davon ausgegangen werden, daß vor etwa 12 bis 14 Milliarden Jahren unsere Milchstraße eine stürmische Entwicklung durchgemacht hat. In jener Zeit bildete sich aus den kontrahierenden Gasmassen die heute als Dicke Scheibe sichtbare Population von Sternen. Danach trat offenbar eine Ruhephase von etwa 3 bis 5 Milliarden Jahren ein, in der nur wenige Sterne, darunter HR 7569 entstanden. Erst vor etwa 8 Milliarden Jahren setzte erneut Sternentstehung ein.

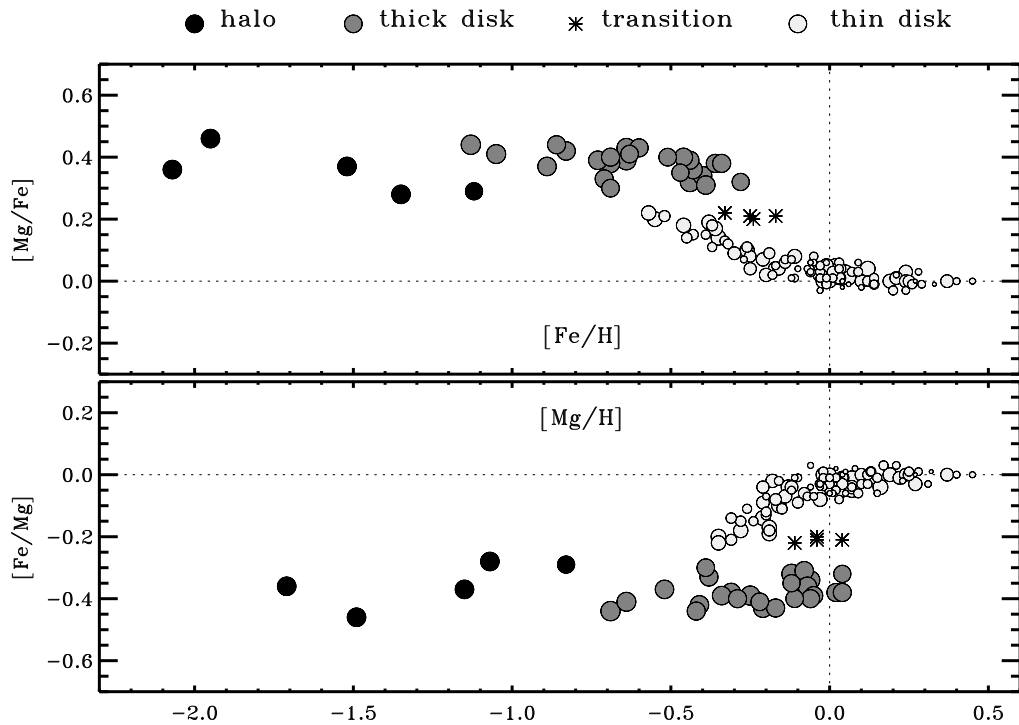


Abbildung 5.12 Verteilung der Sterne im $[Mg/Fe]$ gegen $[Fe/Mg]$ Häufigkeitsdiagramm bezogen jeweils auf eines der beiden Verhältnisse. Die Trennung in verschiedenen Populationen (Halosterne, Dicke Scheibe, Dünne Scheibe und Übergangsterne) erfolgt aufgrund kinematischer Daten und der chemischen Verhältnisse. So zeigt sowohl die Gruppe der Halosterne, als auch die Gruppe der Dicken Scheiben Sterne eine geringere Häufigkeit an Eisen, bezogen auf die Magnesiumhäufigkeit. Daneben weisen die Sterne der Dünne Scheibe nahezu solare Eisen- zu Magnesiumhäufigkeiten auf. Die Halosterne können schließlich aufgrund ihrer galaktischen Rotationsgeschwindigkeiten von den Sternen der Dicken Scheibe getrennt werden.

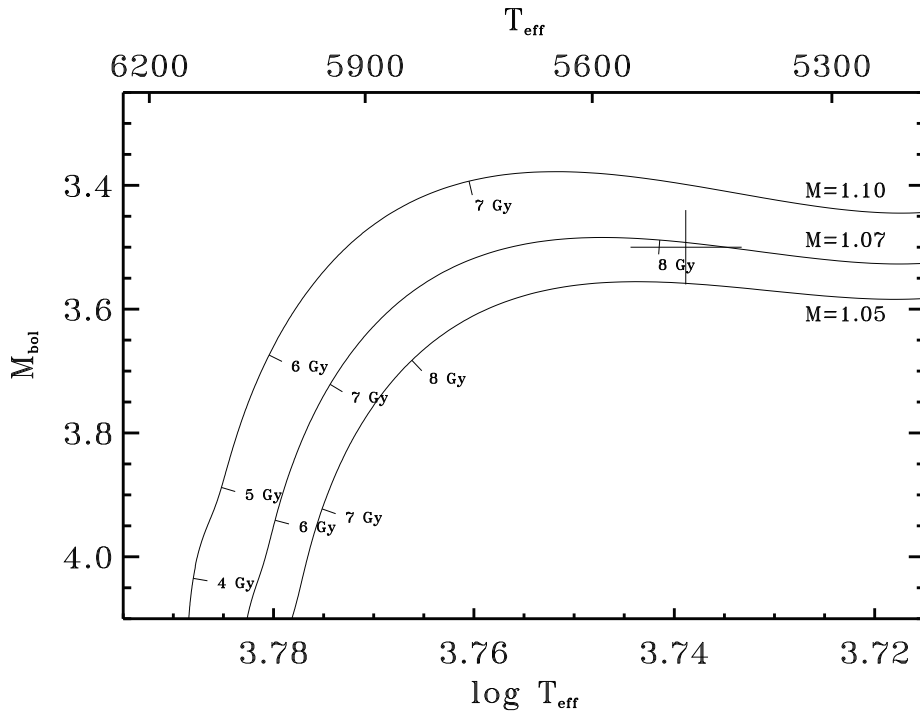


Abbildung 5.13 Entwicklungswege mit *neuem Standard* für den Stern 70 Virginis. Die resultierenden Angaben für Alter und Masse des Sterns können aus der Tabelle 5.3 entnommen werden.

Jetzt mit Gasen geänderter chemischer Zusammensetzung, die sich aus den sterbenden massenreichen Sternen der Dicken Scheiben Population ergab. Darüber hinaus kann anhand der Tabelle 5.3 abgelesen werden, daß die Sterne der Dicken Scheibe mit über 0.90 Sonnenmassen nicht mehr existieren, da Sterne mit höherer Masse sich schneller entwickeln. Nachdem die Sterne der Dicken Scheibe sich alle in der Nähe des Turn-offs befinden, bleibt jedoch kein großer Zeitraum mehr bis sich selbst diese Sterne zu Weißen Zwergen entwickeln. Somit müssen die massereicheren Sterne der Dicken Scheibe bereits in Form von Weißen Zwergen vorhanden sein. Aus Betrachtungen der Skalenhöhe und -länge der Dicken Scheibe, kann gefolgert werden, daß ein nicht zu vernachlässigender Anteil der *unsichtbaren Materie* unserer Galaxis in den Überresten der ehemaligen Dicken Scheibe Sternen verborgen liegen kann.

Der Spielraum in den Altersangaben von Tabelle 5.3 aufgrund der im letzten Kapitel untersuchten Variationsmöglichkeiten ist gering. So ergab die Verringerung des Heliummassenbruchteils für die Sterne der Dicken Scheibe von $Y=0.2723$ auf $Y=0.250$ nur um etwa 700 Millionen Jahre geringere Alter. Trotz dieser genauen Ergebnisse bleiben für eine zukünftige Arbeit natürlich noch offene Fragen und Wünsche zur weiteren Verbesserung der theoretischen Sternentwicklung.

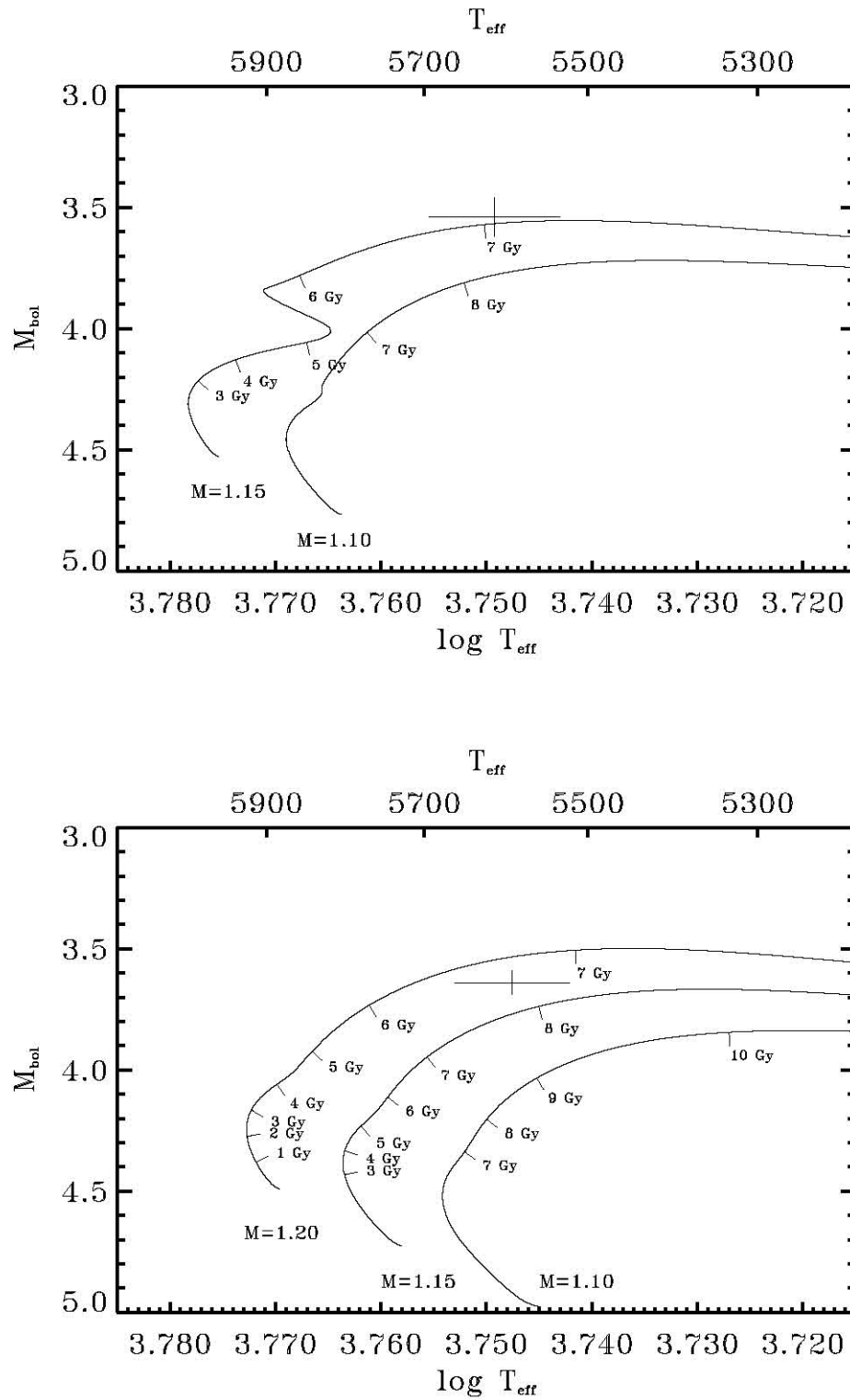


Abbildung 5.14 Entwicklungswege mit *neuem Standard* für die Sterne 109 Piscinis (oben) und μ Herculis (unten). Die resultierenden Angaben für Alter und Masse der Sterne können aus der Tabelle 5.3 entnommen werden.

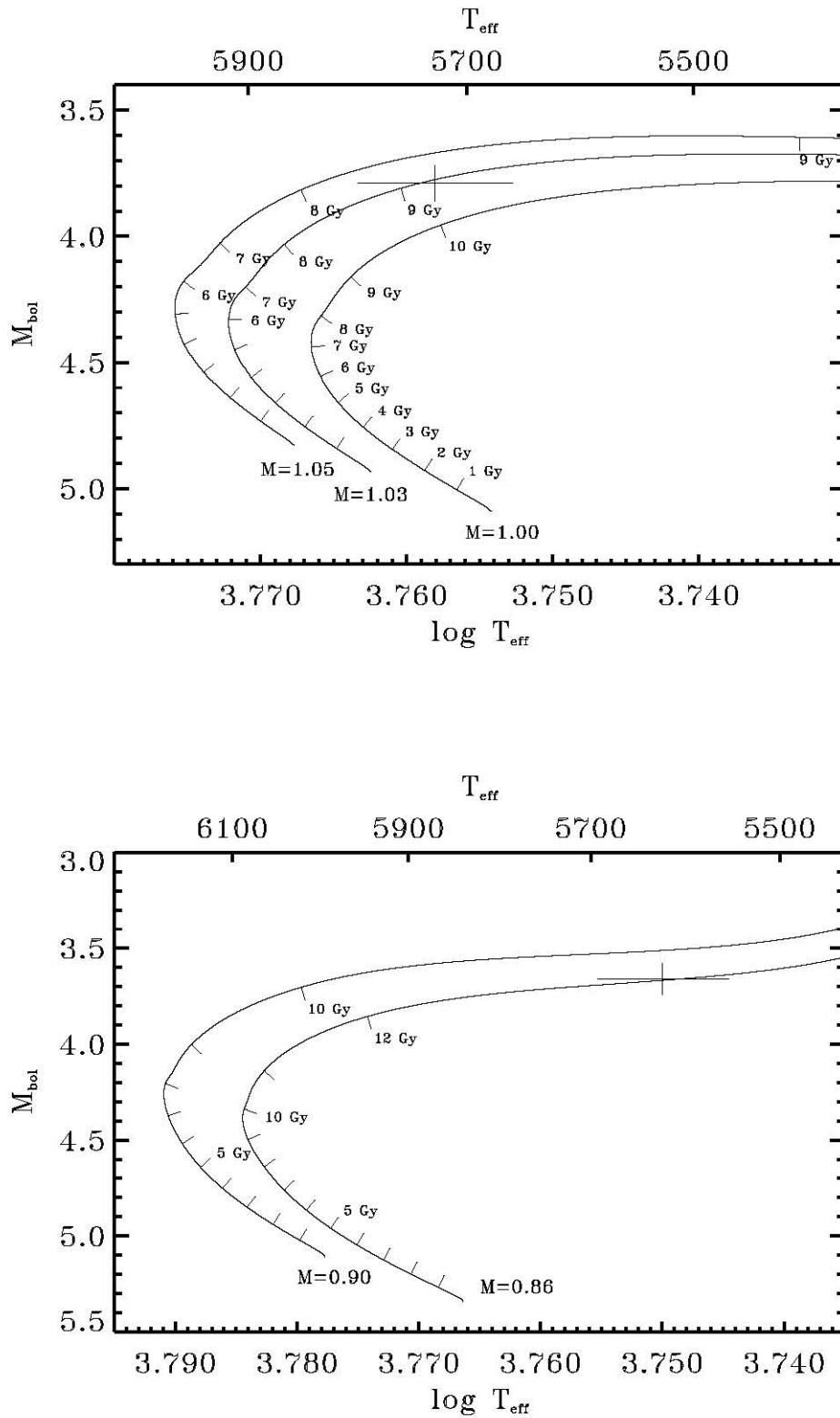


Abbildung 5.15 Entwicklungswege mit *neuem Standard* für die Sterne HR 7569 (oben) und HD 222794 (unten). Die resultierenden Angaben für Alter und Masse der Sterne können aus der Tabelle 5.3 entnommen werden.

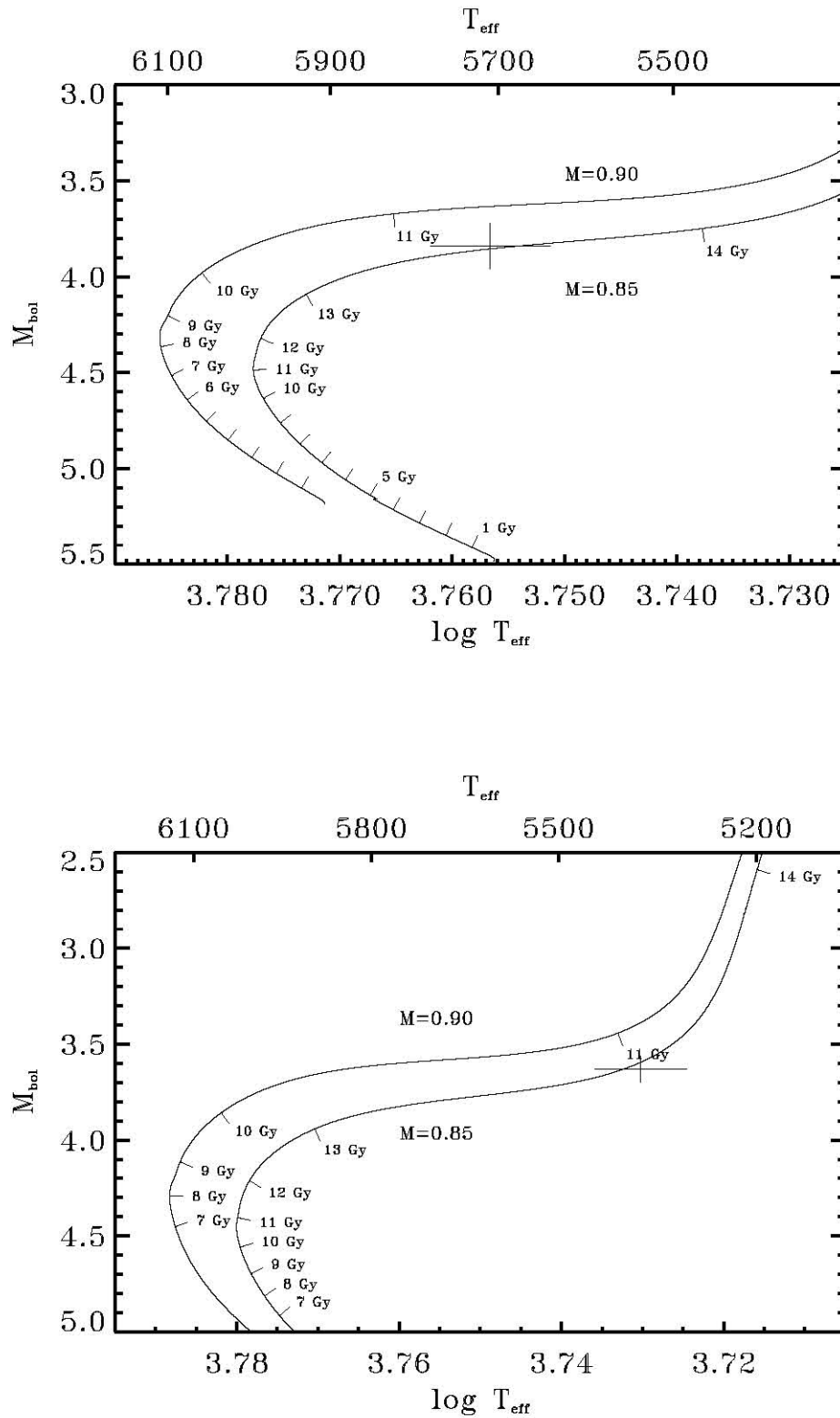


Abbildung 5.16 Entwicklungswege mit *neuem Standard* für die Sterne HD 10519 (oben) und HR 173 (unten). Die resultierenden Angaben für Alter und Masse der Sterne können aus der Tabelle 5.3 entnommen werden.

6. Offene Fragen und Wünsche

Anhand der Beispiele des letzten Kapitels wird deutlich, daß für eine Altersbestimmung von Sternen am Turn-off und davor möglichst detaillierte stellare Parameter benötigt werden. Somit wäre in der Zukunft eine Reduzierung der Unsicherheiten von Schwerebeschleunigung und Effektivtemperatur für genauere Altersdaten ebenso wünschenswert, wie eine möglichst genaue Ermittlung der chemischen Zusammensetzung. Beispielsweise wäre die Sternentstehungslücke nach der Bildung der Dicken Scheibe mit spektroskopischen Schwerebeschleunigungen, aufgrund der höheren Fehler gegenüber den Parallaxen, nicht deutlich nachweisbar gewesen. Insofern sind die Parallaxen des Hipparcos-Satelliten von großer Bedeutung und es besteht die begründete Hoffnung, daß in Zukunft noch leistungsfähigere Astrometriesatelliten gebaut werden.

Auf Seite der Modellphysik in der Sternentwicklung zeigte sich, daß die Bedingungen der zu untersuchenden Sterne möglichst exakt wiedergespiegelt werden sollten. Dieser Sachverhalt wird in der Tabelle 4.4 im Bezug auf chemische Häufigkeiten sofort deutlich. Ebenso zeigte der Einfluß von Opazitäten mit höherem Anteil an Alpha-Elementen beachtliche Auswirkungen. Insofern wäre auch die Bereitstellung umfangreicherer Opazitätstabellen wünschenswert. Aus den Berechnungen der Opazitäten sind, außer im Fall von extrem kühlen Opazitäten, keine großen Änderungen der Sternalter mehr zu erwarten. Dagegen sind Zustandsgleichung, Diffusion und Konvektion durchaus Bereiche, deren theoretische Formulierungen eine Altersbestimmung von Sternen noch immer beachtlich beeinflussen können. Zwar sind die Beispiele von Sternen an der Nullalter-Hauptreihe ein Beleg für vorhandene Probleme in den Modellatmosphären, etwa bei der Bestimmung der Schwerebeschleunigung. Doch können die hohen Alter dieser Sterne - insbesondere wenn sie mit ihrer bolometrischen Helligkeit angetragen werden - durchaus auch als Hinweis auf unzulängliche Modelle der Sternentwicklung

betrachtet werden.

Die Rolle der Konvektion wird aber durch die Eichung an der heutigen Sonne entschärft. Nachdem die Konvektion die Lage der Hayashi-Linie und des Riesenastes deutlich beeinflusst, wäre eine weitere Untersuchung der verschiedenen theoretischen Formulierungen mit Sternen aus diesen Regionen des Hertzsprung-Russell-Diagramms denkbar. Allerdings ergeben sich gerade auf der Hayashi-Linie neue Probleme, die im Rahmen dieser Arbeit bisher überhaupt nicht erwähnt wurden. So weisen Sterne auf der Vorhauptreihe, beispielsweise die T-Tauri Sterne, hohe Rotationsgeschwindigkeiten und Massenverlusten auf. Sowohl Rotation, als auch Massenverlust müssten in diesem Fall zusätzlich in die Modellbildung eingehen. Schließlich sollte auch der Ansatz einer möglichst konsistenten Formulierung der Konvektion für Sternaufbau und Modellatmosphären im Sinne einer Reduzierung der vorhandenen freien Parameter über die vorliegende Arbeit hinaus verfolgt werden. Eventuell ergeben sich weitere Möglichkeiten aus dem Anschluß von mehrdimensionalen hydrodynamischen Modellen an eindimensionale Modelle. So bestehen auch auf dem Gebiet der Modellatmosphären noch bekannte Probleme, wie etwa die Modellierung der Mitte-Rand-Verdunklung der Sonne. Eine Lösung dieses Problems sollte fast zwangsläufig in die Formulierung der äußeren Randbedingung des Sternaufbaus eingehen.

Diffusion und Zustandsgleichung können mit Hilfe der inzwischen sehr umfangreichen Daten aus der Helioseismologie genauer untersucht werden. Von einer zufriedenstellenden theoretischen Reproduktion der beobachteten Oszillationsmoden ist man noch weit entfernt. Nachdem die Oszillationen als akustische Wellen gerade durch den chemischen Aufbau, die Zustandsgleichung und auch durch die Konvektionszone entscheidend beeinflusst werden, zeigen sich auf diesem Gebiet die besten Aussichten, die Modellbildung zu verbessern.

Äußerst wünschenswert wäre eine unabhängige Bestimmung der Heliumhäufigkeit in der Sonne, da somit einer der Eichparameter festgelegt wäre. Eine Möglichkeit diese Festlegung für Feldsterne durchzuführen wird derzeit von Grupp bearbeitet. Dabei soll die Lage der Hauptreihe eines jungen Sternhaufens überprüft werden, indem bei massereichen und somit heißeren Sternen des Sternhaufens die Heliumhäufigkeit spektroskopisch gewonnen wird.

Auch blieb im Rahmen dieser Arbeit die Auswirkung des nuklearen Netzwerks der Sternentwicklung auf die Altersbestimmung offen. Durch die Entdeckung der Neutrino-Oszillationen konnte in den letzten Jahren immerhin das Problem des fehlenden Neutrinoflusses auf der Erde insofern geklärt werden, daß die Energieerzeugungsmechanismen in der Sonne nicht mehr grundlegend angezweifelt werden. In diesem Zusammenhang sollte nochmals erwähnt werden, daß die Sonne den einzigen *Referenzpunkt* im Hertzsprung-Russell-Diagramm darstellt, der ein relativ genaues und unabhängig bestimmtes Alter aufweist. Es wäre von großer Bedeutung wenn es gelingen würde, die Alter von anderen Sternen auf eine unabhängige Methode ebenso genau zu ermitteln.

Abschließend sollte noch festgehalten werden, daß eine möglichst hohe Anzahl von detaillierten Entwicklungsrechnungen für Einzelsterne mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zu weiteren Erkenntnissen führen wird. Gerade durch die immer kürzer werdenden Rechenzeiten sind die individuellen Altersbestimmungen möglich geworden. Die oftmals fehlerhaften Vereinfachungen bezüglich der chemischen Zusammensetzungen der Sternmodelle haben in der Vergangenheit immer wieder zu unsicheren Altersangaben geführt.

Somit bleibt als letzter allgemeiner Wunsch: **Wenn schon die Möglichkeit zu genauen Beobachtungen und umfangreichen Modellen besteht, dann sollte diese auch genutzt werden. Der in den letzten Jahren anhaltende Trend zu immer schnelleren Publikationen steht hier teilweise im Widerspruch zu sorgfältigen Untersuchungen. Als Folge gehen zum Teil die in den Daten verborgenen Erkenntnisse im Rauschen der ungenauen Untersuchungen unter. Ein ruhiges und langfristiges Arbeiten, das sich auch mit Detailfragen aufhalten kann, wäre in diesem Zusammenhang wünschenswert.**

Literaturverzeichnis

- Alexander D.R., Ferguson J.W., 1994, ApJ **437**, 879
 Anders E., Grevesse N., 1989, Geochimica et Cosmochimica Acta **53**, 197
 Asplund M., Nordlund Å., Trampedach R., Stein R.F., 1999, A&A **346**, L17
 Axer M., 1993, *Massen, Entfernungen und Entwicklungszustände massearmer Halo-Feldsterne*, Dissertation
 Axer M., Fuhrmann K., Gehren T., 1994, A&A **291**, 895
 Bahcall J.N., Pinsonneault M.H., Wasserburg G.J., 1995, Rev.Mod.Phys. **67**, 781
 Barnett R.M., *et al.*, 1996, Phys. Rev. D **54**, 655
 Bernkopf Jan, 1998, A&A **332**, 127
 Bernkopf Jan, Fiedler Alex, Fuhrmann Klaus, 2001, ASP Conf. Ser., *Astrophysical Ages and Time Scales*, in press
 Biémont E., Baudoux M., Kurucz R., Ansbacher W., Pinnington E., 1991, A&A **249**, 539
 Blackwell D., Booth A., Petford A., 1984, A&A **132**, 236
 Böhm-Vitense E., 1958, Zeitschrift für Astrophysik **46**, 108
 Burgers J. M., 1969, *Flow Equations for Composite Gases*, Academic Press, New York
 Carney B.W., Harris W.E., 2001, *Star Clusters*, Springer Verlag
 Chieffi A., Straniero, O., 1989, ApJS **71**, 47
 Cox J.P., Giuli R.T., 1968, *Stellar Structure*, Gordon and Breach
 Canuto V.M., Mazzitelli I., 1992, ApJ **389**, 724
 Chapman S., Cowling T. G., 1970, *The Mathematical Theory of non-uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge
 Christensen-Dalsgaard J., Gough D.O., Thompson M.J., 1991, ApJ **378**, 413
 Christensen-Dalsgaard J., Däppen W., 1992, A&A Rev. **4**, 267
 Clayton D.D., 1983, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, The University of Chicago Press
 Cowan J.J. *et al.*, 1999, ApJ **521**, 194
 Denegri D., Sadoulet B., Spiro M., 1990, Rev.Mod.Phys. **62**, 1
 Emden R., 1907, *Gaskugeln*, Teubner Verlag
 Eddington A.S., 1926, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press
 Eggleton P.P., Faulkner J., Flannery B.P., 1973, A&A **23**, 325
 Freedman W.L., 2000, Physics Reports **333**, 13
 Fuhrmann K., 1998, A&A **338**, 161
 Fuhrmann K., 2000, A&A submitted
 Fuhrmann K., Axer M., Gehren T., 1993, A&A **271**, 451
 Fuhrmann K., 1993, *Temperatur und Elementhäufigkeiten von F- und G-Sternen*, Dissertation
 Fuhrmann K., Pfeiffer J.M., Bernkopf J., 1997, A&A **326**, 1081
 Fuhrmann K., Pfeiffer J.M., Bernkopf J., 1998, A&A **336**, 942
 Fuhrmann K. & Bernkopf J., 1999, A&A **347**, 897
 Gehren T., 1977, A&A **59**, 303
 Grupp F., 1997, *Spektroskopische Untersuchung alter metallarmer Halosterne*, Diplomarbeit
 Grupp F., 1999, private Mitteilung
 Guenther D.B., Demarque P., Kim J.-C., Pinsonneault M.H., 1992, ApJ **387**, 372
 Gyllenberg, W., 1936, Poplär-Astron. Tidskrift XVII, 34
 Hayashi C., 1966, ARA&A **4**, 171
 Henyey L.G., Forbes J.E., Gould N.L., 1964, ApJ **139**, 306
 Holweger H., 1979, *Les Elements et leurs Isotopes dans l'Univers*, Universite de Li'ège, 117
 Holweger H., Kock M., Bard A., 1995, A&A **296**, 233
 Iben Icko, 1964, A&A **141**, 993
 Iben Icko, 1967, Annual Review A&A **5**, 571
 Iben I.Jr., Renzini A., 1984, Phys. Rep. **105**, 331
 Iglesias C.A., Rogers F.J., 1996, ApJ **464**, 943
 Itoh N. *et al.*, 1983, ApJ **273**, 774
 Karttunen H. *et al.*, 1987, *Fundamental Astronomy*, Springer Verlag
 Kippenhahn R., 1984, *100 Milliarden Sonnen*, Piper Verlag

- Kippenhahn R., Weigert A., 1990, *Stellar Structure and Evolution*, Springer Verlag
- Kippenhahn R., Weigert A., Hofmeister E., 1967, *Methods for Calculating Stellar Evolution. In: Methods in Computational Physics Vol.7*, Academic Press
- Kurucz R.L., 1979, ApJS **40**, 1
- Kurucz R.L., 1995, Highlights of Astronomy **10**, 407
- Lauterborn D., 1976, Mitt. Astron. Ges. **38**, 155
- Leighton R.B., Noyes R.W., Simon G.W., 1962, ApJ **135**, 474
- Mihalas D., 1978, *Stellar Atmospheres*, W.H. Freeman and Company
- Mihalas D., Däppen W., Hummer D.G., 1988, ApJ **331**, 815
- Morel P., van't Veer C., Berthomieu G., Castelli F., Cayrel R., Goupil M.J., Lebreton Y., 1994, A&A **286**, 91
- Olive K.A., Steigmann G., Skillman E.D., 1997, ApJ **483**, 788
- Paquette C. *et al.*, 1986, ApJS **61**, 177
- Plez B., Brett J., Nordlund A., 1992, A&A **256**, 551
- Perryman M.A.C., *et al.*, 1995, A&A **304**, 69
- Perryman M.A.C., *et al.*, 1997, *The Hipparcos and Tycho Catalogues*, ESA Publication Division, Noordwijk
- Peytremann, E., 1974, A&A **33**, 203
- Reetz J., 1999, *Sauerstoff in kühlen Sternen und die chemische Entwicklung der Galaxis*, Dissertation
- Reif F., 1987, *Statistische Physik und Theorie der Wärme*, de Gruyter, Berlin
- Rogers F.J., Iglesias C.A., 1992, ApJS **79**, 507
- Rogers F.J., Iglesias C.A., 1994, Science **263**, 50
- Rogers F.J., Swenson F.J., Iglesias C.A., 1996, ApJ **456**, 902
- Salaris M., Weiss A., 1998, A&A **335**, 943
- Scheffler H., Elsässer H., 1990, *Physik der Sonne und der Sterne*, BI Wissenschaftsverlag
- Schlattl H., Weiss A., Ludwig H.-G., 1997, A&A **322**, 646
- Spaeth H., 1973, *Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen*, Oldenburg-Verlag, München
- Stürenburg S., Holweger H., 1990, A&A **237**, 125
- Thoul A.A., Bahcall J.N., Loeb A., 1994, ApJ **421**, 828
- Unsöld A., 1968, *Physik der Sternatmosphären*, Springer Verlag
- VandenBerg D.A., 1983, ApJS **51**, 24
- VandenBerg D.A., 1985, ApJS **58**, 711
- VandenBerg D.A., 1991, ASP Conf. Ser. **13**, 183
- VandenBerg D.A., 2000, ApJS **129**, 315
- VandenBerg D.A., Bell R.A., 1985, ApJS **58**, 561
- VandenBerg D.A., Laskarides P.G., 1987, ApJS **64**, 103
- Vitense E., 1953, Zeitschrift für Astrophysik **32**, 135
- Weiss A., Keady J.J., Magee N.H., 1990, Atomic Data & Nuclear Data Tables **45**, 209

Danksagung

Mit Abschluß des schriftlichen Werkes - die Arbeit ließe sich beliebig vortsetzen - möchte ich den Personen danken, die in den Jahren mit Rat und Tat an der Verwirklichung dieser Arbeit beteiligt waren. Hier ist an erster Stelle mein Betreuer Prof. Dr. Thomas Gehren zu nennen, der jederzeit eine offene Tür hatte und nie aufgab mir Wissen zu vermitteln und meine Kritikfähigkeit zu schärfen. Darüber hinaus hatte er insbesondere in Krisenzeiten die notwendige Geduld mit mir und gab mir jegliche Freiheit zur wissenschaftlichen Entfaltung. Hierzu ermöglichte er mir die Mitarbeit in der Gruppe *Kühle Sterne*, die mit ihren weiteren Mitgliedern einen Teil des fachlichen Hintergrunds für diese Arbeit stellte.

Dabei möchte ich besonders Dr. Klaus Fuhrmann danken, der nicht locker ließ mich in Sachen *Entwicklungsrechnungen* zu motivieren und mir mehrfach die Gelegenheit bot mit ihm zusammen zu publizieren. In vielen Fällen überließ er mir Literatur und Programme, die meine Arbeit bereicherten. Darüber hinaus waren die Gespräche mit ihm sowohl am Institut, als auch auf dem Calar Alto immer wieder Quelle von Erkenntnissen und Ideen. In diesem Zusammenhang sei auch Michael Pfeiffer genannt, der den Dank leider nicht mehr persönlich entgegennehmen kann. Er hatte mich unter anderem in die *Geheimnisse* des Spektrographen FOCES am Calar Alto eingeweiht. Schließlich möchte ich aus der Gruppe noch Dr. Johannes Reetz nennen, der mir neben seinem Wissen zum Thema Modellatmosphären auch *sein Kind* SIU überließ, welches bei der Berechnung von Liniensprofilen behilflich war. Auch die übrigen Gruppenmitglieder haben immer wieder durch Diskussionen einen Beitrag zu der Arbeit geliefert, wofür ich ihnen an dieser Stelle herzlich danke.

Ein ganz besonderer Dank geht an Dr. Achim Weiss und seine stets hilfsbereiten *Mannen* Dr. Josef Wagenhuber und Helmut Schlattl vom Max-Planck-Institut für Astrophysik in Garching. Ohne sie wäre diese Arbeit auf dem Gebiet der Sternentwicklung keinesfalls in dem vorliegenden Umfang möglich gewesen. Sie überließen mir zu anfangs großzügig ihr Entwicklungsprogramm und versorgten mich auch im Verlauf meiner Arbeit immer wieder mit wichtigen Daten.

Als ein *Phänomen* an der Universitätssternwarte muß schließlich Alex Fiedler erwähnt werden. Er hatte mehrmals den Nerv bei einem Problem mit IDL *rasch ein kleines Programm* zu entwerfen. Für diese nicht selbstverständliche Hilfsbereitschaft möchte ich hier ausdrücklich meinen Dank aussprechen.

Daneben gilt sowohl allen genannten Kollegen, als auch den am Institut und im Bereich der Praktika in der Schellingstraße bisher nicht genannten Personen (dort insbesondere Prof. Dr. Reinhart Claus) mein Dank für viele persönlich bereichernde Stunden. Sie bildeten über das Fachliche hinaus für viele Jahre einen für mich wichtigen *menschlichen* Rahmen.

Lebenslauf

15.03.1965	Geburt in Augsburg
09/1971 - 07/1975	Volksschule am Kappeneck in Augsburg
09/1975 - 06/1985	Holbein-Gymnasium Augsburg
28.06.1985	Allgemeine Hochschulreife
10/1985 - 01/1988	Studium Physik Diplom an der Universität Ulm
02/1988 - 09/1989	Zivildienst beim Malteser Hilfsdienst Augsburg
22.03.1990	Vordiplom Physik an der Universität Ulm
04/1990 - 02/1991	Studium Lehramt Gymnasium Mathematik und Physik an der LMU München
03/1991 - 07/1994	Studium Physik Diplom an der LMU München
11/1991 - 07/1994	Betreuung des Anfängerpraktikums für Physiker an der Universität Augsburg
14.07.1994	Diplom in Physik an der LMU München
07/1994 - 09/1994	Befristete Tätigkeit bei ZEUNA-Stärker Augsburg
seit dem 01.11.1994	Arbeit zur Promotion in Astrophysik am Institut für Astronomie und Astrophysik der LMU München
05/1995 - 02/2001	Betreuung der Physikpraktika für Mediziner, Chemiker und andere Naturwissenschaftler an der LMU München
01/2001 - 03/2001	Mitarbeiter bei MAN Roland in Augsburg
seit dem 01.04.2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Bayerischen Landesamt für Umweltschutz in Augsburg